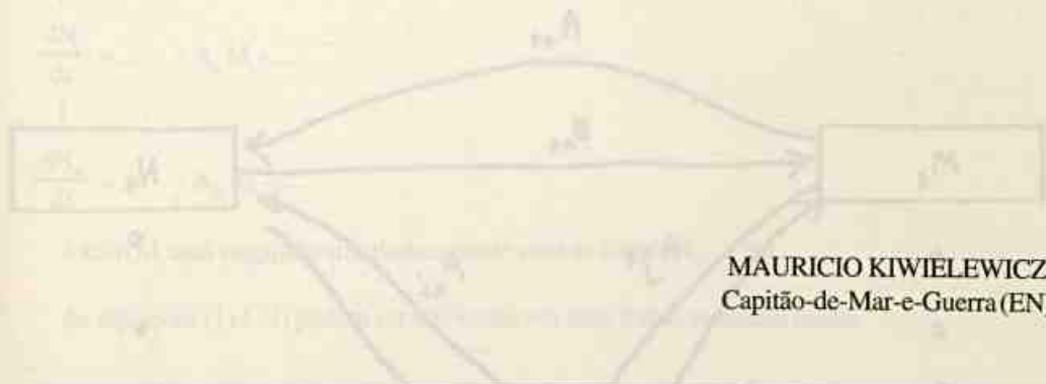


EM DIREÇÃO A UMA TEORIA GERAL DA ESTRATÉGIA MATEMÁTICA



MAURICIO KIWIELEWICZ
Capitão-de-Mar-e-Guerra (EN)

CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

As soluções das equações de Lanchester no campo tático foram apresentadas em situações anteriores* Uma extensão dos modelos de combate pode ser feita de modo a se ter uma integração de caráter estratégico.

As possibilidades desta Teoria Geral Estratégica podem ser entendidas, por exemplo, nas seguintes situações:

Considere a figura 1

1º Contexto

Sejam M_1, \dots, M_i exércitos de países de uma coalização em combate contra outra coalização formada pelos países N_1, \dots, N_j . As linhas indicam as interações (combates) expressas pelas taxas de atrito A_{11}, B_{11}, \dots

2º Contexto

M_1, \dots, M_i são porta-aviões do país Azul em combate com uma esquadra Vermelha N_1, \dots, N_j . As linhas indicam interações entre aviões do país Azul e lançamentos de mísseis por parte da esquadra Vermelha.

A princípio vamos assumir que as equações que governam o combate são da forma:

$$\frac{dM}{dt} = -BN \quad (1)$$

$$\frac{dN}{dt} = -AM \quad (2)$$

Onde M e N são matrizes colunas dadas por

$$M = \{M_1 \ M_2 \ \dots \ M_i\}$$

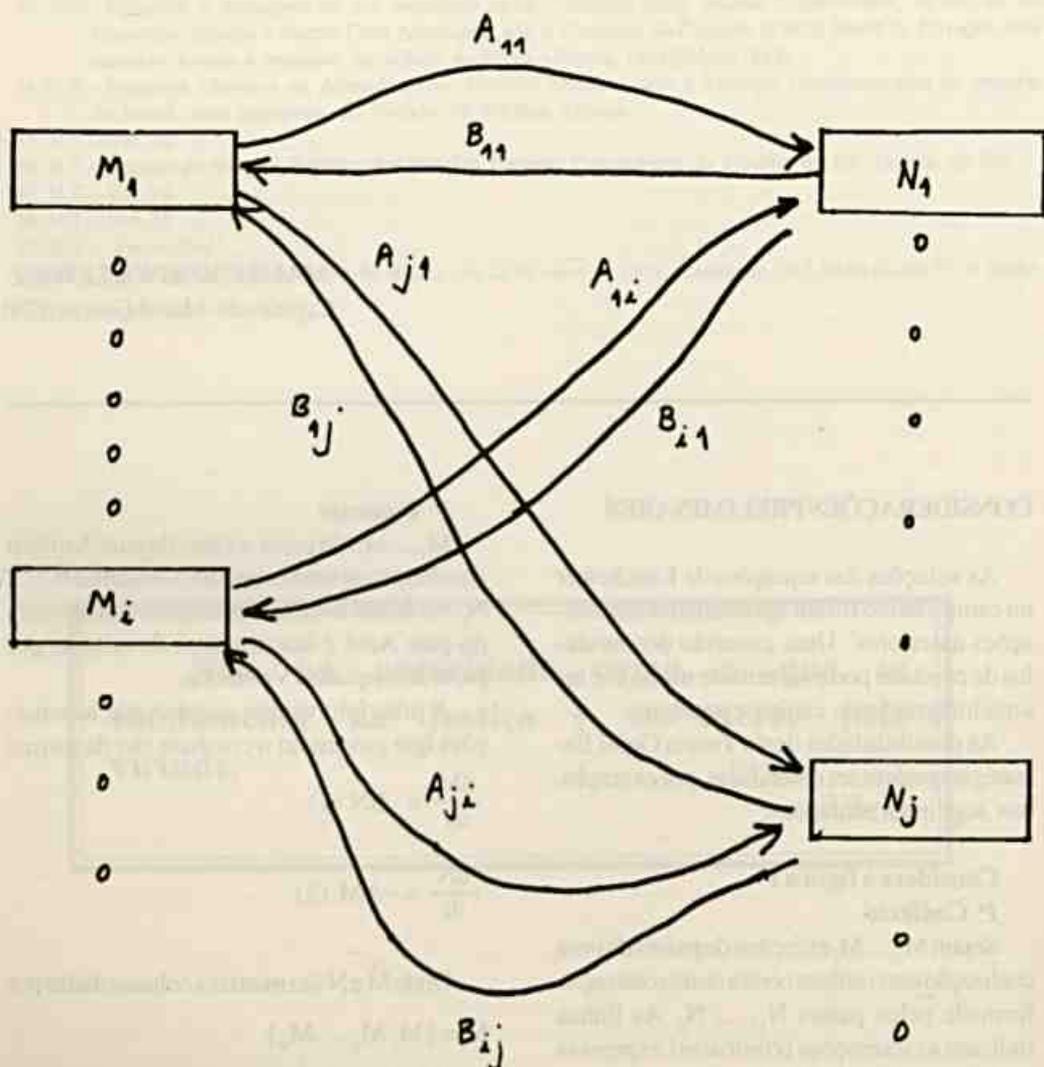
$$N = \{N_1 \ N_2 \ \dots \ N_j\}$$

* RMB 3º Trim/1996 e 1º Trim/1997

FIGURA 1

AZUL (BLUE)

VERMELHO (RED)



O modelo matemático do engajamento é representado pelas variáveis de estado M_j e N_j interagindo um com outro através das taxas de atrito A_{ij} e B_{ij} .

A título de exemplo pode-se apresentar o aspecto de uma coluna de A (a_j -ésima) de modo que:

$$\frac{dN_1}{dt} = \dots - A_{1j} M_j - \dots$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \dots - A_{2j} M_j - \dots$$

⋮

$$\frac{dN_l}{dt} = \dots - A_{lj} M_j - \dots$$

⋮

$$\frac{dN_R}{dt} = \dots - A_{Rj} M_j - \dots$$

(3)

Assim M_j está engajado simultaneamente com as forças N_1, \dots, N_R

As equações (1) e (2) podem ser colocadas em uma forma matricial única:

$$\frac{dX}{dt} = \dot{X} = CX \quad (4)$$

onde

$$X = \{MN\} \quad (5)$$

e,

$$C = \begin{bmatrix} O & -B \\ -A & O \end{bmatrix} \quad (6)$$

ALGUNS RESULTADOS IMPORTANTES

Solução da equação $\dot{X} = CX$

A solução geral X pode ser colocada na forma $X = P\Phi$ onde P é a matriz generalizada de autovetores direitos e Φ é a matriz coluna cujos elementos são funções do tempo.

Assim

$$\dot{X} = CP\Phi \quad (7)$$

O que conduz a

$$\dot{\Phi} = P^{-1}CP\Phi = J\Phi \quad (8)$$

Onde

$$\Phi = \{\Phi^{(1)} \Phi^{(2)} \dots \Phi^{(i)} \dots\} \quad (9)$$

$$\dot{\Phi} = \{\dot{\Phi}^{(1)} \dot{\Phi}^{(2)} \dots \dot{\Phi}^{(i)} \dots\} \quad (10)$$

e

$$J = P^{-1}CP = \begin{bmatrix} J^{(1)} & & & O \\ & J^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J^{(i)} \end{bmatrix} \quad (11)$$

A matriz (11) é conhecida como a forma canônica de Jordan da matriz C.

Um típico "jeitão" de $\dot{\Phi} = J\Phi$ é da forma:

$$\dot{\Phi} = J^{(i)} \Phi^{(i)} \quad (12)$$

Onde

$$\Phi = \{\Phi_1^{(i)} \Phi_2^{(i)} \dots \Phi_K^{(i)}\}_{K \times 1} \quad (13)$$

$$\Phi^{(i)} = \{\Phi_1^{(i)} \Phi_2^{(i)} \dots \Phi_K^{(i)}\}_{K \times 1} \quad (14)$$

Onde $J^{(i)}$ pode-se apresentar basicamente de três modos.

Tipo 1:

$$J^{(i)} = \lambda^{(i)} \quad (15)$$

Onde a multiplicidade de $\lambda^{(i)}$ é 1.

Tipo 2:

$$J^{(i)} = \lambda^{(i)} I \quad (16)$$

quando a multiplicidade de $\lambda^{(i)}$ é igual a K com $K \geq 2$, os correspondentes autovetores são linearmente independentes.

Tipo 3:

$$J^{(i)} = \lambda^{(i)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$K \times K$

Pode-se mostrar que:

$$\begin{aligned} \varphi^{(i)} &= \exp(\lambda^{(i)} t) \left[I + \frac{\lambda^{(i)} t}{1!} H_1 + \frac{(\lambda^{(i)} t)^2}{2!} H_2 + \dots \right] A^{(i)} \\ &= \exp(\lambda^{(i)} t) \left[I + \frac{\lambda^{(i)} t}{1!} H + \frac{(\lambda^{(i)} t)^2}{2!} H^2 + \dots \right] A^{(i)} \\ &= \exp(\lambda^{(i)} t) D^{(i)} A^{(i)} \quad (18) \end{aligned}$$

Onde

$$D^{(i)} = I + \frac{\lambda^{(i)} t}{1!} H + \frac{(\lambda^{(i)} t)^2}{2!} H^2 + \dots + \frac{(\lambda^{(i)} t)^{K-1}}{(K-1)!} H^{K-1} \quad (19)$$

e

$$A^{(i)} = \{ A_1^{(i)} \ A_2^{(i)} \ \dots \ A_K^{(i)} \} \quad (20)$$

Finalmente

$$X = P [\exp (\lambda t) D] Q^T X_0 \quad (28)$$

EQUAÇÕES DE LANCHESTER PARA COMBATES ACOPLADOS E NÃO ACOPLADOS

Já sabemos que o modelo matricial para o engajamento satisfaz a $\frac{dX}{dt} = CX$ e pode-se mostrar que sendo q um autovetor esquerdo, a equação (29) é satisfeita.

$$C^T q = \lambda q \quad (29)$$

O autovetor q pode ser decomposto em colunas correspondentes a forças azuis e vermelhas. Assim

$$q = \{C_1 V \ C_2 W\} \quad (30)$$

Pode-se, levando em conta que $C = \begin{bmatrix} O & -B \\ -A & O \end{bmatrix}$ escrever:

$$\begin{bmatrix} O & -A^T \\ -B^T & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 V \\ C_2 W \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} C_1 V \\ C_2 W \end{bmatrix} \quad (31)$$

Ou

$$-A^T C_2 W = \lambda C_1 V \quad (32)$$

$$-B^T C_1 V = \lambda C_2 W \quad (33)$$

Pré-multiplicando (32) por B^T

$$-B^T A^T C_2 W = B^T C_1 V \lambda = -\lambda^2 C_2 W \quad \text{ou} \quad (B^T A^T - \lambda^2 I) C_2 W = 0 \quad (34)$$

Pré-multiplicando (33) por A^T

$$-A^T B^T C_1 V = A^T C_2 W \lambda \quad \text{ou} \quad (A^T B^T - \lambda^2 I) C_1 V = 0 \quad (35)$$

A ($n \times m$) e B ($m \times n$) e $m > n$, então existirão n autovalores comuns.

As matrizes produto $A^T B^T$ e $B^T A^T$ são sempre não negativas. De acordo com o teorema de Frobenius-Perron o sistema tem um autovalor maximal em módulo. A este autovalor corresponde

um autovetor que será denotado por q_1 . Desde que $C_1 V_1$ e $C_2 W_1$ são submatrizes do autovetor esquerdo de C segue que:

$$q_1 = \{C_1 V_1 \quad C_2 W_1\} \quad (36)$$

Considerando novamente o sistema

$$-A^T C_2 W = \lambda C_1 W \quad (37)$$

$$-B^T C_1 V = \lambda C_2 W \quad (38)$$

Tomando-se a transposta do sistema em $V = V_1$ e $W = W_1$

$$-C_2 W_1^T A = \lambda_1 C_1 V_1^T \quad (39)$$

$$-C_1 V_1^T B = \lambda_1 C_2 W_1^T \quad (40)$$

Pré-multiplicando as equações por $e = \{1 \ 1 \dots 1\}$ vem

$$\frac{C_2}{C_1} = - \left(\frac{V_1^T B e \cdot V_1^T e}{W_1^T A e \cdot W_1^T e} \right)^{1/2} \quad (41)$$

Conforme já foi verificado $Q^T P = I$.

Assim o autovetor generalizado a esquerda q_1 é ortogonal aos autovetores direitos P_j , ou,

$$q_1^T P_j = \begin{cases} 1 & P_j = j \\ 0 & P_j \neq j \end{cases} \quad (42)$$

Reconsiderando:

$$X = P [\exp(\lambda t) D] Q^T X_0$$

Pré-multiplicando por q_1^T (autovetor dominante transposto) e lembrando que o correspondente autovalor dominante é $\lambda_1 = \lambda^{(1)}$ e ainda a notação $q_1 = q^{(1)}$:

$$[q_1^T X]_{1 \times 0} = [q_1^T P [\exp(\lambda t) D] Q^T X_0]_{1 \times 0}$$

Que desenvolvida conduz a

$$[q_1^T X]_{1 \times 0} = q_1^T X_0 \quad (43)$$

Observando agora que

$$X_0 = \{M_0 \ N_0\} \text{ segue}$$

$$q_1^T X_0 = [C_1 V_1^T \ C_2 W_1^T] \{M_0 \ N_0\}$$

$$q_1^T X_0 = C_1 (V_1^T M_0 + \frac{C_2}{C_1} W_1^T N_0)$$

$$q_1^T X_0 = C_1 [V_1^T M_0 - \left(\frac{V_1^T B e}{W_1^T A e} \cdot \frac{V_1^T e}{W_1^T e} \right) W_1^T N_0] \quad (44)$$

Pode-se reduzir a expressão (44) a um aspecto adimensional através da introdução do parâmetro S (parâmetro de superioridade):

$$S = \frac{q_1^T X}{C_1 V_1^T M_0} \quad (45)$$

Introduzindo

$$\varnothing_0 = \left(\frac{W_1^T A e}{V_1^T B e} \cdot \frac{W_1^T e}{V_1^T e} \right)^{1/2} \frac{V_1^T M_0}{W_1^T N_0} \quad (46)$$

Ter-se-á

$$S_0 = \frac{q_1^T X_0}{C_1 V_1^T M_0} = 1 - \left(\frac{V_1^T B e}{W_1^T A e} \cdot \frac{V_1^T e}{W_1^T e} \right) \frac{W_1^T N_0}{V_1^T M_0} = 1 - \varnothing_0^{-1} \quad (47)$$

Os parâmetros adimensionais S_1 , S_0 e \varnothing_0 são independentes da escolha de V_1 e W_1 . O parâmetro S mede a contribuição do termo dominante na obtenção da solução do nível de forças ao longo do tempo.

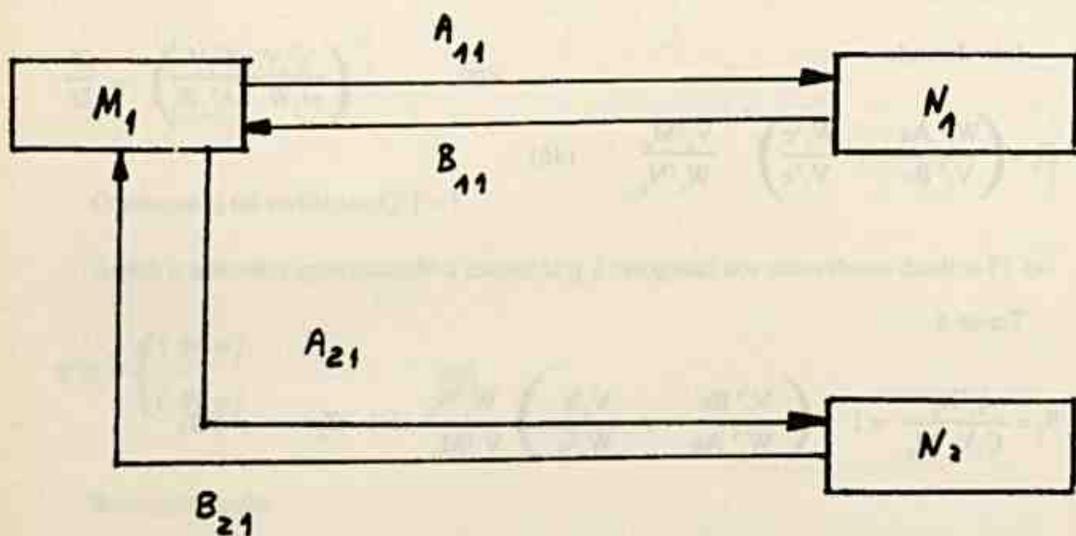
Pode-se notar que

$$0 < S_0 < 1.0 \quad \text{para} \quad 1.0 < \varnothing_0 < \infty \quad (48)$$

$$S_0 = 0 \quad \text{para} \quad \varnothing_0 = 1 \quad (49)$$

$$-\infty < S_0 < 0 \quad \text{para} \quad 0 < \varnothing_0 < 1.0 \quad (50)$$

FIGURAZ



SOLUÇÃO NUMÉRICA

As equações do sistema $\frac{dx}{dt} = \dot{x} = CX$ podem ser colocados na forma discreta ou

$$\frac{1}{\Delta t} (X_{n+1} - X_n) = CX_n \quad \text{ou} \quad X_{n+1} = (I + \Delta t C) X_n \quad (51)$$

com $\Delta t = t_{n+1} - t_n$

Um pouco mais de sofisticação pode ser obtido se desejarmos incluir o efeito da adição ou retirada durante o combate.

Assim

$$X_{n+1} = (I + \Delta t C) X_n + D_n \quad (52)$$

EXEMPLO

Considere o combate delineado na figura 2 pela força M_1 contra as forças N_1 e N_2 . Considere, ainda, conhecida a matriz de taxas de atrito:

$$\begin{bmatrix} \dot{M}_1 \\ \dot{N}_1 \\ \dot{N}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3/2 & -1 \\ -4/3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

Neste caso $X^T = \{M_1, N_1, N_2\} = \{X_1, X_2, X_3\}$ e

$$A = \begin{bmatrix} -4/3 \\ 2 \end{bmatrix}_{2 \times 1}, \quad B = [3/2 \quad 1]_{1 \times 2}$$

a) cálculo do λ dominante

$$[C^T - \lambda I] = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & -4/3 & -2 \\ -3/2 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda (\lambda^2 - 4) = 0$$

$$\text{logo } \lambda_1 = 2$$

b) cálculo de q_1

$$\begin{pmatrix} -2 & -4/3 & -2 \\ -3/2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

que conduz a

$$a = 1, b = -3/4 \text{ e } c = -1/2$$

$$\text{Logo } q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3/4 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

c) Cálculo de V_1^T e W_1^T

$$\text{Como } A = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T B^T = \begin{bmatrix} 4/3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 \text{ e } B^T A^T = \begin{bmatrix} 3/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4/3 & 2 \end{bmatrix}$$

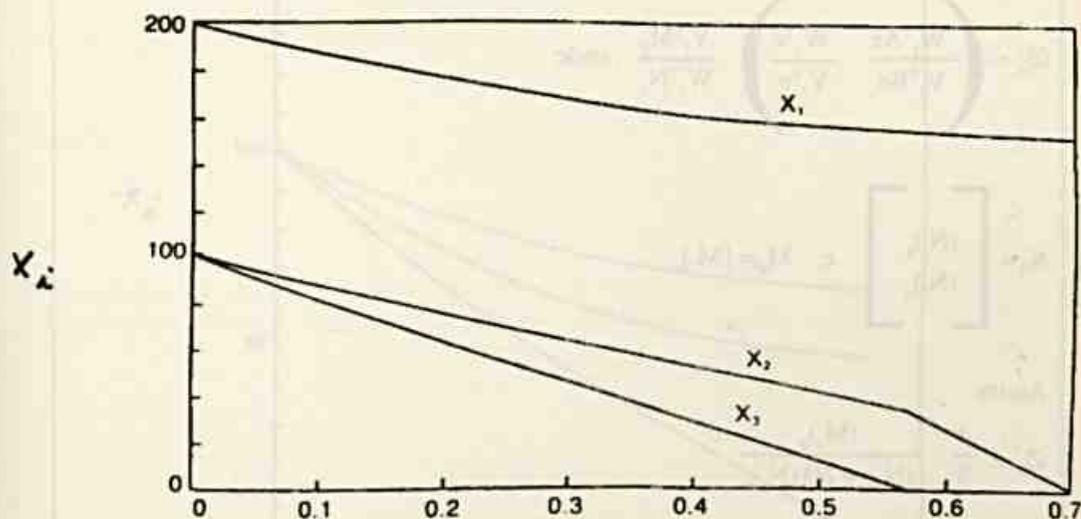
Logo, onde $\alpha \beta = \lambda^2$

$$(A^T B^T - \alpha \beta I) C_1 V_1 = 0 \text{ ou } (4 - 4) V_1 = 0, \text{ logo } V_1 = 1 \text{ (por exemplo)}$$

e

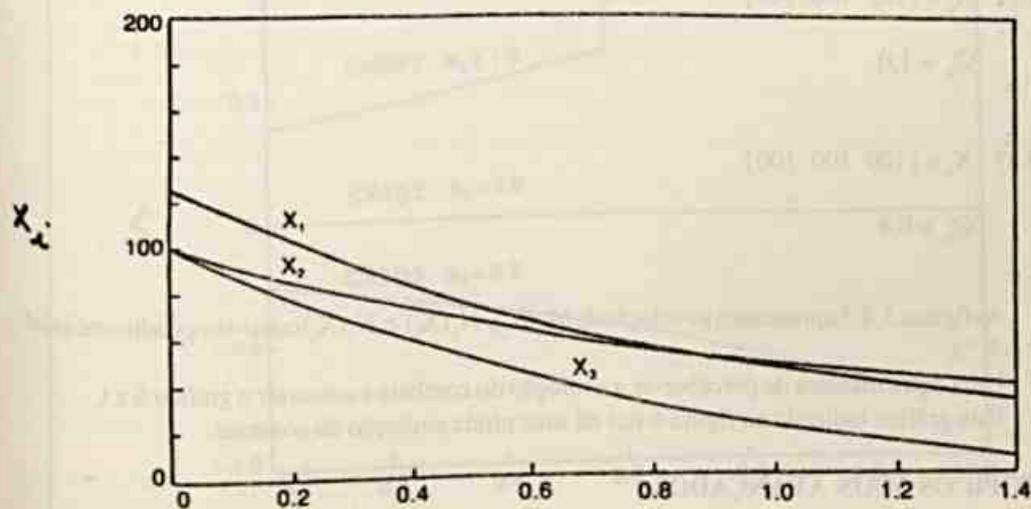
$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4/3 & 2 \end{pmatrix} - 4I \right) W_1 = 0, \text{ o que fornece } W_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

FIGURA 3



$$z = \lambda^{(1)} t$$

FIGURA 4



$$z = \lambda^{(1)} t$$

d) Cálculo de \varnothing_0

$$\varnothing_0 = \left(\frac{W_1^T A e}{V_1^T B e} \quad \frac{W_1^T e}{V_1^T e} \right)^{1/2} \frac{V_1^T M_0}{W_1^T N_0}, \text{ onde}$$

$$N_0 = \begin{bmatrix} (N_1)_0 \\ (N_2)_0 \end{bmatrix} \text{ e } M_0 = [M_1]_0$$

Assim

$$\varnothing_0 = \frac{4}{3} \frac{(M_1)_0}{(N_1)_0 + 2/3(N_2)_0}$$

Consideremos três situações

d.1) $X_0 = \{ [M_1]_0 \ [N_1]_0 \ [N_2]_0 \} = \{ 200 \ 100 \ 100 \}$

$$\varnothing_0 = 1.6$$

d.2) $X_0 = \{ 125 \ 100 \ 100 \}$

$$\varnothing_0 = 1.0$$

d.3) $X_0 = \{ 100 \ 100 \ 100 \}$

$$\varnothing_0 = 0.8$$

As figuras 3, 4, 5 apresentam a evolução de $M_1(X_1)$, $N_1(X_2)$ e $N_2(X_3)$ com o tempo adimensional $\tau = \lambda^{-1}t$.

Uma outra maneira de perceber-se a evolução do combate é construir o gráfico $S \times t$.

Este gráfico indicado na figura 6 nos dá uma nítida evolução do combate.

TÓPICOS MAIS AVANÇADOS

O modelo geral apresentado acima caracteriza a situação típica do fogo direto. Pode-se desenvolver um modelo que leve em conta os efeitos do fogo em área de engajamento.

FIGURA 5

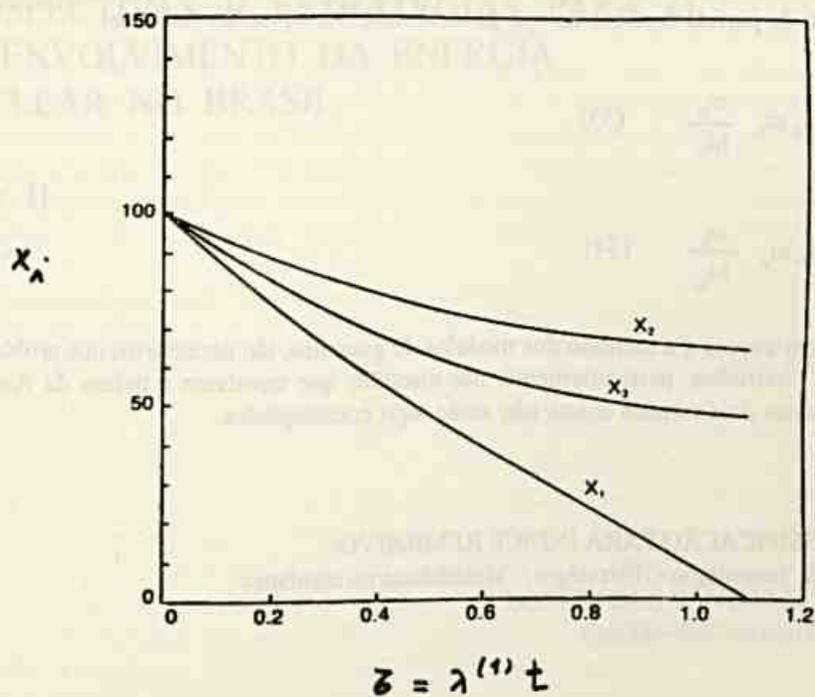
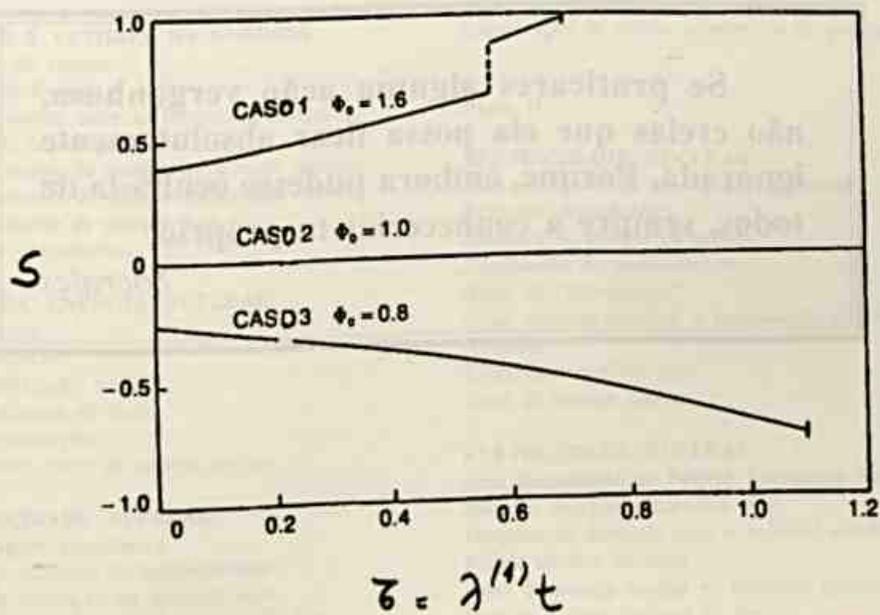


FIGURA 6



O ponto de partida consiste no uso generalizado das equações clássicas:

$$\frac{dm_B}{dt} = -a_R m_R \frac{m_B}{M_B} \quad (53)$$

$$\frac{dm_R}{dt} = -a_B m_B \frac{m_R}{M_R} \quad (54)$$

Um outro avanço é a inclusão dos modelos de guerrilha, tão necessários nos problemas de operações ribeirinhas, particularmente, nas questões que envolvam a defesa da Amazônia. Contudo, estes dois estudos acima não serão aqui contemplados.

 CLASSIFICAÇÃO PARA ÍNDICE REMISSIVO:

<Ciência & Tecnologia> /Estratégia /; Matemática no combate;

**Se praticares alguma ação vergonhosa,
não creias que ela possa ficar absolutamente
ignorada. Porque, embora pudesse ocultá-la de
todos, sempre a conhecerias tu próprio.**

Sócrates