

# A CONTINUAÇÃO DA FESTA: Ondas, Corpúsculos e as duas Ranhuras\*

*Eu acho que posso dizer com segurança que ninguém  
compreende Mecânica Quântica*

Richard Feynman, Nobel de Física de 1965

PAULO ROBERTO GOTAC\*\*  
Capitão de Mar e Guerra (Ret<sup>2</sup>)

---

## SUMÁRIO

Introdução  
Retrospecto  
A relutância, os raios X e o Efeito Compton  
O surgimento da Mecânica Quântica  
Bohr e o espectro do hidrogênio  
Os saltos quânticos de Heisenberg  
De Broglie e suas ondas  
Schrödinger e sua equação  
O que significa? A Interpretação de Copenhague  
A dupla ranhura  
Conclusão

## INTRODUÇÃO

O presente trabalho constitui a continuação de outro [1] em que se imaginou uma festa de salão que, com suas várias evoluções, deixou recorrentemente surpresa a plateia científica especialmente

interessada na explicação dos fenômenos da Física relacionados com a propagação e natureza da luz e da radiação. Esses fenômenos, ao longo dos séculos, desde que o método baseado na observação foi estabelecido por Galileu Galilei (1564-1642) [2], apresentou vários desdobramentos.

---

\* Continuação do artigo "Corpúsculos e Ondas – Uma estranha dança", publicado na *RMB* do 4º trim/2017.

\*\* Foi declarado Guarda-Marinha em junho de 1963; é graduado em Física (UERJ-1971); docência em Eletromagnetismo (Faculdade Veiga de Almeida - 1974; Universidade Católica de Petrópolis - 1975/76). Foi chefe do Departamento Técnico do Centro de Munição da Marinha (1984/86) e chefe do Departamento de Pesquisa do Instituto de Pesquisas (1986/88). Após sua transferência para a reserva, foi chefe de Projeto do Instituto Nacional de Projetos Especiais (1988-1996) e exerceu atividade docente na Escola Naval em Eletromagnetismo e Física (1996-2008). Vários artigos publicados em revistas sobre Física.

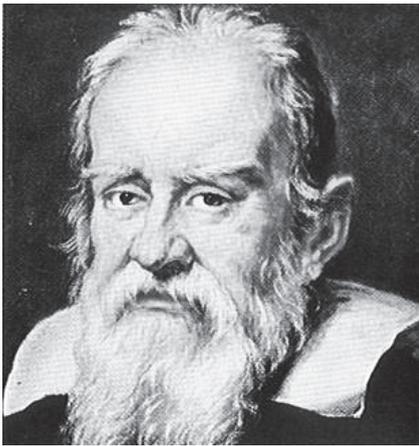


Figura 1 – Galileu Galilei

Como se verá, outras perplexidades emergiram, mais sutis, oriundas dos trabalhos dos cientistas que construíram, durante as quatro primeiras décadas do século XX, o formalismo da Mecânica Quântica, extremamente bem-sucedido quando utilizado em desenvolvimentos tecnológicos sem os quais a vida moderna não seria como é, embora a sua interpretação, ou seja, seu significado em termos da intuição da escala humana, esteja sujeita a debate até hoje.

A primeira parte deste artigo será dedicada ao resumo da situação até a proposta de Einstein para explicar o efeito fotoelétrico, ponto em que foi fechado o conteúdo do trabalho anterior. Em seguida, será feita uma análise dando conta da relutância da comunidade científica em aceitar a visão corpuscular da radiação, finalmente vencida pelos resultados fornecidos, mediante o uso dos raios X, do chamado Efeito Compton.

Será abordada então a inevitável incursão dos conhecimentos quânticos consolidados até os primeiros anos do século XX, na tentativa de descobrir a estrutura atômica dos elementos, estimulada pelos trabalhos de Rutherford que resultaram na

primeira forma do que viria a ser conhecido como Mecânica Quântica, formulada por Niels Bohr em 1913.

Citam-se as limitações do Esquema de Bohr que resultaram no estabelecimento, por Heisenberg, de uma teoria quântica mais consistente; em seguida, se apresenta a proposta revolucionária de Broglie, sugerindo propriedades ondulatórias das partículas, a extensão por Schrödinger, com sua equação básica e a interpretação probabilística proposta por Max Born.

A exposição encerra-se com uma rápida referência à Interpretação de Copenhague e a descrição de um experimento mostrando a perplexidade da Mecânica Quântica. As referências biográficas dos cientistas citados no trabalho anterior não serão repetidas.

## RETROSPECTO

Inicialmente, os corpúsculos propostos em 1704 por Isaac Newton (1643-1727) em sua obra *Opticks* [1], escrita em inglês, e em outros trabalhos (os primeiros ocupantes do salão até então vazio) serviram de base para explicar os vários aspectos ligados às manifestações luminosas, modelo que se adaptava perfeitamente à elucidação de um bom número de situações, como a reflexão, a refração que ocorre quando passa de um meio para o outro e a decomposição da luz branca nas cores fundamentais ao atravessar um prisma, embora esse modelo fosse omissivo em outras situações. Apesar de tal formulação ter sido, desde o seu aparecimento, contestada por outros, como o holandês Christian Huygens (1629-1695), que sugeria a natureza ondulatória para interpretar a luz, ela foi aceita por mais de um século, por conta do prestígio desfrutado pelo cientista britânico no meio acadêmico. Foi definitivamente desbançada, no entanto, sendo seus protagonistas

corpúsculares convidados a se retirar do salão, como resultado das experiências de interferência realizadas pelo inglês Thomas Young (1773-1829) e dos trabalhos teóricos do francês Augustin-Jean Fresnel (1788-1827).

As ondas reinaram, então, triunfantes, e, por meio do trabalho teórico do brilhante cientista escocês James Clerk Maxwell (1831-1879), foi estabelecida a revolucionária unificação da ótica com a eletricidade e o magnetismo, estes últimos anteriormente já unificados pelos experimentos e estudos do dinamarquês Hans Christian Oersted (1777-1851) e de Michael Faraday (1791-1867) [3], constituindo o que se entende hoje por eletromagnetismo.

A verificação experimental das chamadas ondas eletromagnéticas, previstas por Maxwell, que enquadrou a luz, até então considerada um fenômeno particular, como uma manifestação de oscilações dos chamados campos eletromagnéticos, foi realizada em 1883 por Heinrich Hertz (1857-1894), e seu desenvolvimento, abrangendo frequências de radiações não visíveis, como as ondas de rádio, pode ser considerado como um importante motor da revolução industrial que estava em curso na Europa.



Figura 2 – Hans Christian Oersted

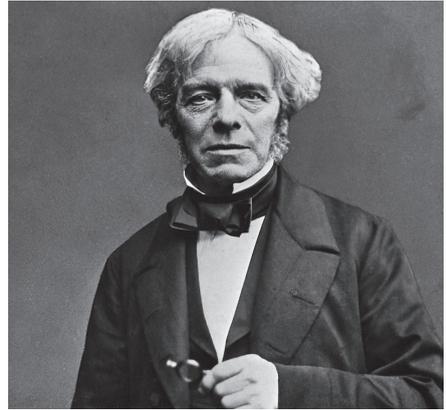


Figura 3 – Michael Faraday

A harmonia ondulatória foi perturbada pela introdução, no salão de danças, de novas partículas. Eram, porém, de outro tipo, mais sofisticadas, dotadas de cargas elétricas e capazes de interagir com as radiações eletromagnéticas de modo particular, como revelado pelo trabalho do físico Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928), Nobel de Física em 1902.

Sua descoberta foi possibilitada pelo desenvolvimento das chamadas bombas de vácuo, às quais era aplicada uma diferença de potencial, evoluídas para o que ficou conhecido como tubos de raios catódicos, usados nos trabalhos de J. J. Thomson (1856-1940), inglês, Nobel de Física em 1906, responsável por estabelecer a natureza corpuscular, com os respectivos parâmetros quantitativos, do feixe luminoso resultante da colisão com as poucas moléculas de gás presentes, entre as extremidades do tubo. Além dele, o francês Jean Baptiste Perrin (1870-1942), mediante os resultados obtidos por Lorentz, dimensionando a interação de cargas elétricas com os campos eletromagnéticos, concluiu que a carga daquelas partículas, que passaram a receber a denominação de elétrons, era negativa, com valor exato estabelecido somente

em 1909 pelo americano Robert Millikan (1868-1953), Nobel de Física em 1923.

E, assim, a relação entre as ondas já presentes e as partículas recém-descobertas desenvolveu-se de forma suave e sem sobressaltos, com ambas as entidades convivendo pacificamente. Mas a harmonia não duraria muito.

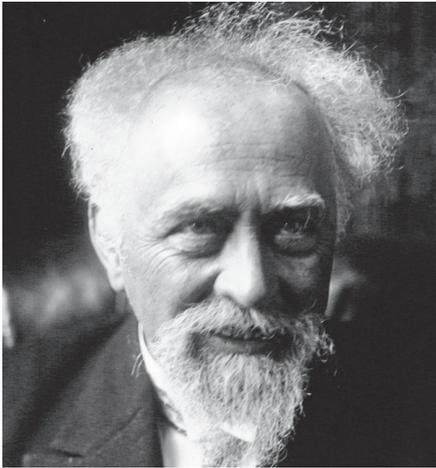


Figura 4 – Jean Baptiste Perrin

A hipótese revolucionária de Max Planck (1858-1947), Nobel de Física em 1918, formulada para apagar o incêndio provocado por uma inconsistência experimental ligada à chamada radiação do corpo negro, conhecida como a “catástrofe do ultravioleta” e que, sem que ele suspeitasse à época, estava abrindo um panorama novo para a Física, gerou conclusões surpreendentemente concordantes com os resultados de laboratório. Consistia em interpretar o espectro de energia da radiação do corpo negro, não contínuo, como estabelecido na teoria clássica puramente ondulatória, reconhecidamente bem-sucedida na explicação de um grande número de fenômenos, embora impotente para elucidar a referida contradição, mas composta por quantida-

des discretas, indivisíveis, os *quanta* de energia, estranhamente proporcionais à frequência através de uma constante, mais tarde promovida a entidade fundamental da natureza, que, em homenagem ao cientista, ficou conhecida como constante de Planck, representada pela letra *h*. É natural que uma hipótese tão revolucionária não tenha sido imediatamente digerida pela quase totalidade da comunidade científica da época.

A ejeção de partículas de uma placa metálica quando sobre ela incide radiação de alta frequência, identificadas pelo trabalho do físico alemão Philipp Lenard (1862-1947), Nobel de Física em 1905, como elétrons, fenômeno conhecido por efeito fotoelétrico, foi observado pela primeira vez por Hertz durante seus experimentos para detectar primordialmente as ondas eletromagnéticas e, por isso, não lhe chamou a devida atenção, e teve frustrada a tentativa, no início do século XX, de uma explicação baseada na teoria eletromagnética, então no auge de credibilidade.

O impasse não passou despercebido a um jovem funcionário do escritório de marcas e patentes de Berna, Albert Einstein (1879-1955), que, ciente da hipótese quântica de Planck sobre a radiação do corpo negro, formulada em 1900, teve a ideia, por ele mesmo apelidada de heurística, uma espécie de tentativa de estender o conceito de pacotes discretos de energia proporcionais à frequência, à própria propagação da luz, ao propor, em célebre trabalho de 1905 (o chamado *annus mirabilis*, ano milagroso, por ser o da publicação de mais dois artigos revolucionários), a existência de corpúsculos, mais tarde conhecidos pela denominação de fótons, que, ao colidirem com os elétrons da placa metálica, expelia-os de lá de acordo com uma relação matemática simples que não podia ser deduzida pelos cânones da

eletrodinâmica clássica e envolvia a frequência da radiação incidente e a constante de Planck  $h$  (ver Figura 5), formando uma estranha simbiose entre a descrição corpuscular e a radiação, geralmente conhecida por dualidade onda-partícula.

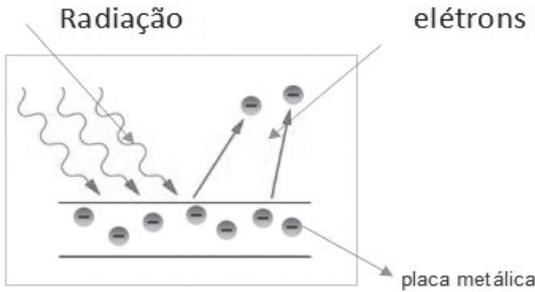


Figura 5 – O efeito fotoelétrico – emissão de elétrons por um material, geralmente metálico, quando exposto a uma radiação eletromagnética

Sem nenhuma conotação de premonição que açodadamente se poderia atribuir a Newton, pois seus corpúsculos possuíam uma natureza completamente diferente da exibida pelos fótons de Einstein, restauravam-se as partículas de luz, sem carga elétrica, com energias maiores para grandes frequências das radiações associadas, propriedade jamais suspeitada por Newton.

E, assim, o salão de danças hipotético tornou-se caótico, com a introdução de dançarinos corpusculares agarrados a ondas de alta frequência que colidiam com os elétrons lá previamente estabelecidos, podendo expeli-los.

## A RELUTÂNCIA, OS RAIOS X E O EFEITO COMPTON

Em que pese a simplicidade da hipótese e da relação matemática proposta por Einstein para explicar o efeito fotoelétrico, a nova natureza corpuscular da luz que vinha a reboque não foi aceita imediatamente pela comunidade científica, tal era

a crença na representação ondulatória da radiação, sendo tolerada a manifestação discreta somente para a interação da energia com a matéria, chancelada por Planck para elucidar o espectro do corpo negro.

Para se ter uma noção da situação, sabe-se que Robert Millikan, na busca de uma comprovação experimental, passou, segundo ele próprio, dez anos de sua vida testando, com base em parâmetros já conhecidos, como a relação  $e/m$  entre a carga e a massa do elétron, expressão matemática proposta por Einstein, sem encontrar discordância, apesar de, conforme seu registro, ela aparentemente violar tudo o que se sabia até então sobre o comportamento da luz [4]. Seus

trabalhos sobre a questão, no entanto, lhe renderam o Nobel de Física em 1923, sendo o de Einstein, concedido pela ideia revolucionária, conferido em 1921, quando já era famoso por causa da Teoria da Relatividade Geral. Teria sido ele laureado se não a tivesse criado e adquirido o decorrente prestígio mundial, por meio da comprovação experimental, obtida mediante os dados coletados durante o eclipse solar de 1919 em Sobral, Ceará? [5].

Outro exemplo ilustrativo sobre a questão refere-se ao fato de que uma banca de quatro notáveis, entre eles o próprio Planck, ao propor Einstein, em 1913, para membro da Academia Prussiana de Ciências, ressaltou, em sua ata decisória, que não havia, até aquele momento, desenvolvimento de Física moderna à época que não tivesse contado com a participação de alguma ideia do examinando, embora a sua proposta dos *quanta* de luz (fótons) para explicar o efeito fotoelétrico constituísse um exagero e que tal ousadia fosse perdoada [4]. Seu nome foi efetivado.



Figura 6 – Wilhelm Konrad Röntgen

Os chamados raios X foram detectados pela primeira vez pelo físico alemão Wilhelm Konrad Röntgen (1845-1923) [5], o primeiro a receber um Nobel de Física, em 1901, quando, ao usar uma ampola de vidro contendo gás a baixa pressão e placas submetidas a uma alta tensão, verificou que os elétrons produzidos no catodo, ao se chocarem com o anodo, davam origem a um tipo de raio, dentro do princípio já previsto pela teoria eletromagnética de Maxwell, segundo o qual cargas elétricas aceleradas (ou desaceleradas) geravam radiação. A Figura 7 mostra esquematicamente o arranjo experimental usado por Röntgen [7].

Desnecessário ressaltar a importância dos raios X em suas inúmeras aplicações, que vão desde a difração – caráter ondulatório – em estruturas cristalinas de metais capazes de revelar a disposição de seus átomos até a medicina. Possuem altas frequências, na faixa de  $3 \times 10^{16}$  a  $3 \times 10^{19}$  hertz, bem superiores às do espectro visível, suficientes, portanto, para manifestar com clareza os aspectos ondulatório, este consagrado à época, e corpuscular imaginados por Einstein, já que a energia dos fótons, estendida a qualquer outro tipo de radiação além da luz, é proporcional à frequência, como já mencionado.

A inegável natureza corpuscular, agregada, por meio de uma estranha dualidade, ao modelo ondulatório, só foi, no entanto, completamente incorporada pela comunidade científica a partir de 1923, quando o físico americano Arthur Holly Compton (1892-1962) [8], Nobel de Física em 1927, descobriu que, quando um feixe de raios X com uma frequência definida é detectado numa determinada direção, após ser refletido pelos elétrons quase estacionários de uma lâmina metálica – espalhamento, em linguagem técnica –, a radiação espalhada possui uma frequência diferente da inicial, sendo a discrepância variável com o ângulo da detecção, fato inconsistente com a visão clássica que estabelece a constância da frequência mesmo depois de espalhada a radiação.

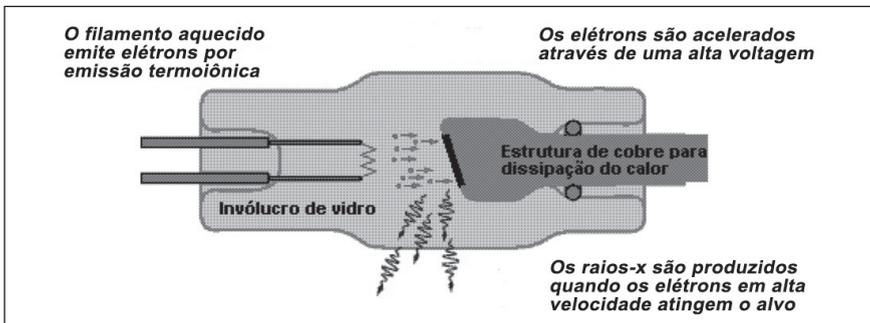


Figura 7 – Formação de raios X



Figura 8 – Arthur Holly Compton

Compton então, assumindo a visão corpuscular, propôs, como tentativa de explicação, uma possível colisão entre partículas, em que seriam conservadas, no domínio relativista, a energia e a quantidade de movimento, sendo uma delas o fóton dos raios X e a outra o elétron quase estacionário, conforme esquematizado na Figura 9, onde o ângulo  $\theta$  indica a direção de detecção da radiação espalhada.

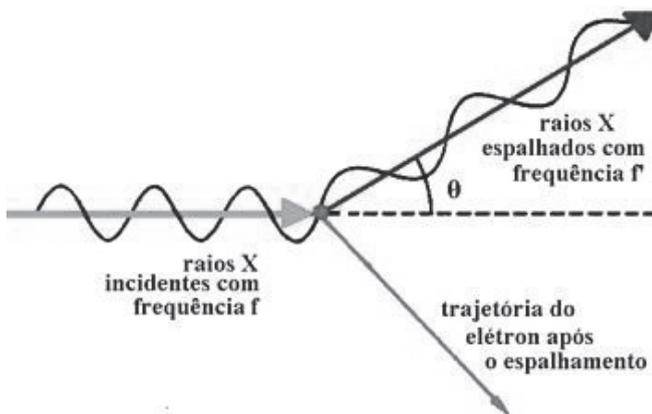


Figura 9 – Efeito Compton

A relação obtida pelo físico harmonizou-se com precisão com resultados experimentais, e o fenômeno, hoje conhecido pela denominação de Efeito Compton [9], obrigou os físicos relutantes, que ainda existiam em 1923, a aceitarem a dualidade onda-partícula presente na radiação.

Assim, como já assinalado no trabalho anterior [1], o salão onde a dança das ondas e dos corpúsculos se desenvolve passa a apresentar um aspecto estranho. Radiações nas quais o aspecto ondulatório se destaca (frequências baixas, menores que as do espectro visível) continuam vivendo em harmonia com os elétrons, partículas puras, com eles interagindo de maneira suave, segundo o modelo de Lorentz, mas são colididos com violência, a ponto de poderem ser expelidos [1] por corpúsculos que predominam em radiações mais agitadas (alta frequência), os fótons (efeito fotoelétrico e Efeito Compton).

## O SURGIMENTO DA MECÂNICA QUÂNTICA

Até 1913, não havia surgido ainda o que se convencionou designar por Mecânica Quântica, dedicada a esclarecer os fenômenos típicos do átomo e que incorporaria novamente a constante de Planck, uma espécie de marca registrada da qual as teorias relacionadas ao mundo microscópico não mais se livrariam. Antes do surgimento da Mecânica Quântica, Max Planck apresentou, relutantemente, em 1900, sua hipótese dos *quanta* de energia proporcionais à frequência, surpreendentemente

bem-sucedida na explicação do espectro do corpo negro – que desafiava a teoria clássica –, dando origem ao aparecimento de uma constante,  $h$  (que recebeu o seu nome e mais tarde foi elevada à categoria de constante fundamental da natureza). Nessa época também foi formulada a extensão de Einstein, por meio da quantização da própria propagação da radiação, com a proposta das partículas de luz, os fótons, igualmente com energia proporcional à frequência. Neste conceito, a constante de proporcionalidade, a mesma de Planck, imagem de demorada aceitação por parte da comunidade científica da época, elucidava com extrema exatidão, mediante uma relação matemática simples, o chamado efeito fotoelétrico.

Em 1911, o cientista neozelandês Ernest Rutherford (1871-1937) [10], Nobel de Química em 1908, conhecido como o pai da Física nuclear, realizou uma série de experimentos envolvendo uma fonte das chamadas partículas Alfa [11], obtidas quando um núcleo instável as emite, transformando-o num outro elemento, com um número atômico duas unidades menor e um número de massa



Figura 10 – Ernest Rutherford

quatro unidades menor, estruturalmente, portanto, equivalentes a núcleos do átomo de Hélio [12].

O propósito era comprovar experimentalmente a validade do modelo do átomo até então aceito, proposto por volta de 1897 por J. J. Thomson, já citado, e que consistia numa massa esférica homogênea, carregada positivamente, e em elétrons negativos nela encravados, formando uma estrutura eletricamente neutra, esquematicamente representada na Figura 11.

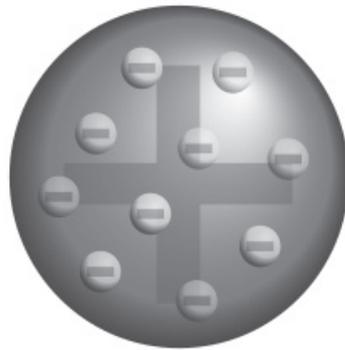


Figura 11 – Representação esquemática do modelo de Thomson

Para isso, bombardeou uma finíssima lâmina de ouro com um feixe de partículas Alfa e observou o espalhamento delas após a colisão com os átomos do ouro [11]. O esquema do experimento é mostrado resumidamente na Figura 12 [12].

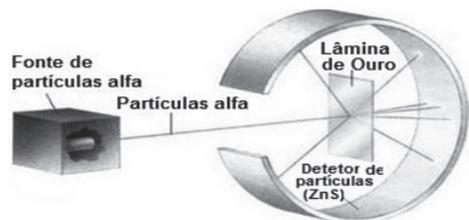


Figura 12 – Esquema do experimento de Rutherford com partículas Alfa

O padrão de espalhamento invalidou o modelo de J. J. Thomson e evidenciou com clareza que o átomo não era composto de uma massa de carga positiva, em que os elétrons estariam inseridos, mas de uma minúscula estrutura de carga positiva, e o núcleo com os elétrons negativos orbitando em torno dele a uma grande distância relativa, assemelhando-se a um minissistema solar, conforme esquematizado na Figura 13 [13].

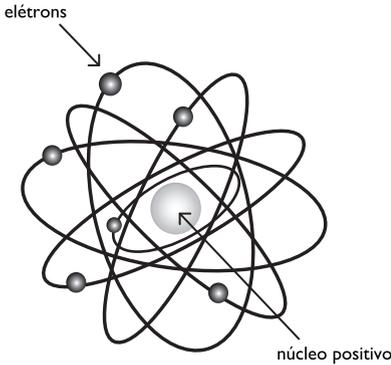


Figura 13 – Modelo atômico de Rutherford

A representação atômica evidenciada pelos trabalhos de Rutherford, no entanto, apresentavam uma inconsistência básica, segundo a qual os elétrons, cargas elétricas, em órbita, por conseguinte aceleradas, deveriam, como já era de conhecimento geral, emitir radiação, dissipando energia até caírem no núcleo, o que faria com que o mundo atômico estável como o conhecemos não existisse.

## BOHR E O ESPECTRO DO HIDROGÊNIO

A ciência da espectroscopia praticamente se iniciou quando Isaac Newton observou

que, ao colocar um prisma diante da luz visível, ela se decompunha em cores, o chamado espectro (Figura 14).

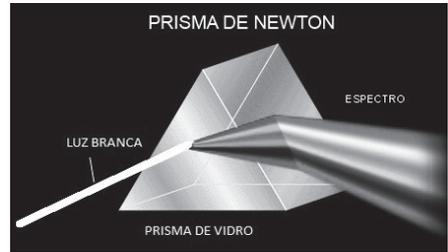


Figura 14 – Decomposição da luz

Átomos de gases confinados em ampolas, ao serem submetidos a descargas elétricas, são excitados e emitem luz característica que, quando decomposta por um espectrômetro (prisma), apresentam uma distribuição praticamente discreta de frequências, situação que não encontra explicação nas teorias clássicas que previam um espectro contínuo. Assim, uma lâmpada de vapor de mercúrio, por exemplo, possui seu espectro característico, uma espécie de impressão digital do elemento mercúrio. Desnecessário acrescentar que o gradativo avanço tecnológico das técnicas de espectroscopia foi de extrema importância no desenvolvimento de setores fundamentais, tais como a astronomia e a medicina.

O átomo mais simples é o do hidrogênio (H), com somente um próton e um elétron orbitando. Não surpreende, portanto, que seu espectro seja dos mais simples. Na Figura 15 e na Tabela I [15] são observados os comprimentos de

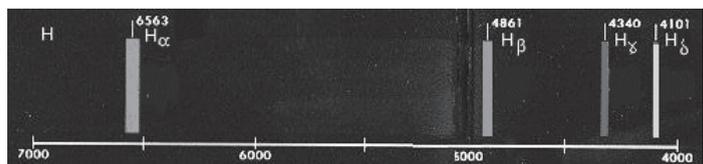


Figura 15 – Comprimentos de onda

COR	NOME	$\lambda$ (em Angstroms)	n
VERMELHO	$H_{\alpha}$	6563	3
VERDE	$H_{\beta}$	4858	4
AZUL	$H_{\gamma}$	4340	5
VIOLETA	$H_{\delta}$	4101	6

Tabela I – Frequências de raias

onda (frequências) das principais raias (há muitas outras, para comprimentos de onda menores – frequências maiores), os seus valores em Angstroms (10-10 m) e os correspondentes valores discretos (n).

Tal relativa simplicidade não passou despercebida a um professor de matemática suíço, Johann Jakob Balmer (1825-1898) [16], que conseguiu estabelecer, talvez por tentativa e erro, uma relação geral muito bem-sucedida para os principais comprimentos de onda do espectro, em função dos valores consecutivos dos valores discretos (n) [17].

O estabelecimento indiscutível do modelo atômico deduzido dos experi-

mentos de espalhamento de partículas Alfa de Rutherford e a sua incompatibilidade com a realidade física de que os átomos, afinal, são estáveis e não irradiam continuamente, o que tornaria o mundo impossível de existir, levaram um jovem físico dinamarquês, Niels Bohr (1885-1962) [18],

que em 1911 deixou Copenhague para trabalhar com Rutherford e J. J. Thomson na Inglaterra, a formular, em um brilhante *insight*, três hipóteses ousadas que misturavam conceitos até então inusitados em confronto com a física clássica, com princípios consagrados por esta última e que inauguraram o que se convencionou designar como Mecânica Quântica. São elas, resumidamente:

– Os elétrons orbitam sob ação da força de Coulomb em torno do núcleo, somente em órbitas permitidas, quantizadas, que não irradiam, mantendo, portanto, os átomos estáveis. Nestas órbitas, a energia dos elétrons é constante.



Figura 16 – Johann Jakob Balmer



Figura 17 – Niels Bohr

– Os valores do momento angular (produto da quantidade de movimento,  $mv$  – massa x velocidade – dos elétrons, pela sua distância ao núcleo) (componentes clássicas) dos elétrons também são quantizados, restritos às órbitas permitidas.

– Quando o átomo é excitado, o elétron sobe seu nível de energia e decai para outro menor, numa espécie de “salto quântico”, emitindo um fóton com energia igual a  $h\nu$  ( $\nu$ , frequência e  $h$ , a constante de Planck, da qual a mecânica quântica em seus desenvolvimentos posteriores até a atualidade jamais se livraria, ou seja, o mundo microscópico incorpora o seu valor, pequeno, porém finito – na física clássica,  $h$  tende para zero), a mesma dos fótons de luz postulados por Einstein para explicar o efeito fotoelétrico.

A Figura 18 resume melhor [19].

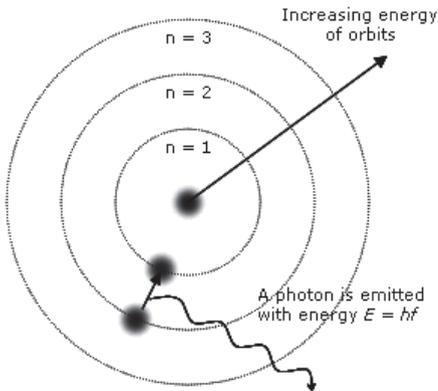


Figura 18 – Modelo de Mecânica Quântica

As deduções teóricas obtidas destas hipóteses harmonizam-se com os valores da série de Balmer, para alguns números quânticos, das raias espectrais do hidrogênio.

Em face, porém, do seu caráter quase que *ad hoc*, experimentos posteriores mais precisos tornaram necessários alguns “penduricalhos” que tiveram que ser agre-

gados às propostas originais, inclusive com a introdução de outros números quânticos além do principal,  $n$ . O cientista que mais contribuiu para essa atividade de correção de rumo foi Arnold Sommerfeld (1868-1951) [20].



Figura 19 – Arnold Sommerfeld

No entanto, no início da década de 20 do século passado, o modelo atômico de Bohr começou a apresentar sinais de esgotamento, evidenciados pelas constantes necessidades de atualizações que, de certa forma, desfiguravam a formulação original. Uma das limitações consistia na dificuldade de aplicá-lo a átomos mais complexos que o de hidrogênio.

Mesmo assim, ao ser empregado na explicação da estrutura eletrônica dos elementos, mediante associação ao chamado Princípio da Exclusão – um dos pilares básicos da estabilidade dos átomos, descoberto pelo notável Físico Wolfgang Pauli (1900-1958) [21], que estabelecia um limite para o número de elétrons que podia ocupar os vários níveis de energia –, o receituário de Bohr ainda hoje constitui a base que permite entender as particularidades da tabela periódica e o mecanismo das reações químicas.



Figura 20 – Wolfgang Pauli

Bohr, por seu trabalho ligado à estrutura atômica, recebeu o Nobel de Física em 1922, mesmo ano que Einstein recebeu o seu, de 1921, pela descoberta do efeito fotoelétrico. Pauli foi laureado em 1945 pela descoberta do Princípio da Exclusão.

## OS SALTOS QUÂNTICOS DE HEISENBERG

Em meados da década de 20 do século XX, portanto, a Mecânica Quântica se encontrava num impasse, pois exibía uma formulação baseada em regras semi-clássicas, com a presença da inexorável e finita, porém pequena, constante de Planck, e “saltos quânticos”, admiravelmente confirmados para algumas raias do espectro do átomo de hidrogênio e para a constituição da tabela periódica, mas dando sinais de fragilidade para problemas ligeiramente mais complexos, obrigando alguns físicos dedicados a introduzirem “remendos” nas hipóteses originais.

A situação só chegou a um porto seguro com a publicação, em 1925, de célebre trabalho [22] organizado por um discípulo

de Bohr, Werner Heisenberg (1901-1976) [23], que, com menos de 25 anos, lançou os pilares teóricos da Mecânica Quântica, válidos até hoje, baseando-se exclusivamente em fenômenos observáveis – as raias espectrais – modelados matematicamente por uma não-comutatividade identificada com o então meio desconhecido cálculo de matrizes. Pelo seu trabalho no estabelecimento das fundações da nova ciência e pela publicação de outro no qual formulou o famoso Princípio da Incerteza [24], que estabelece a magnitude da perturbação que o ato de observar um parâmetro do sistema quântico (sua posição, por exemplo) impõe sobre seu conjugado (a quantidade de movimento), Heisenberg recebeu o Nobel de Física em 1932.



Figura 21 – Werner Heisenberg

## DE BROGLIE E SUAS ONDAS

Mas outras visões começavam a se delinear. Nem todos os físicos daquela época, que se prenunciava frenética, viam com bons olhos a complexidade matemática da nova teoria e muito menos os

estranhos saltos quânticos cuja origem e constituição ninguém explicava.

Foi dentro deste ambiente de certa perplexidade que surgiu um príncipe francês formulando uma hipótese que iria ameaçar a relativa estabilidade do salão de festas, onde já evoluíam partículas reais, como os elétrons, ondas puras, capazes de exibir interferências e difrações, e corpúsculos a elas associados e evidenciados nas mais agitadas – frequências maiores – que surgiram na esteira de uma explicação do chamado efeito fotoelétrico.

Louis Victor Pierre Raymond de Broglie, mais conhecido entre os físicos como Louis de Broglie (1892-1987) [25], pertencia, como se pode concluir da estrutura de seu nome completo, a uma família de longa linhagem de nobres franceses. Inicialmente, por sutil imposição da família no sentido de consolidar a influência do clã no governo da França, foi orientado para estudar e seguir carreira de Direito. Com a morte prematura de seu pai, quando contava com somente 14 anos de idade, sua educação ficou a cargo do irmão mais velho, Maurice, oficial de Marinha, que, conseguindo graduar-se em Física, passou a dedicar-se, com o abandono da carreira militar, ao trabalho científico [26], interagindo com os pioneiros do mundo quântico que começavam a surgir, como Einstein, Planck, Bohr e outros. Durante o tempo em que trabalhou com o irmão, o jovem príncipe adquiriu o interesse pela Física, que teve que ser descontinuado por causa da eclosão da Primeira Guerra Mundial (1914-1918), durante a qual atuou na área de comunicações, ocupando posto na Torre Eiffel.

A partir de 1923, De Broglie refletiu sobre a dualidade onda-partícula representada pelas partículas de luz propostas por Einstein para explicar o efeito foto-



Figura 22 – Louis de Broglie

elétrico – a palavra “fóton” só apareceu pela primeira vez em 1926, em trabalho do químico Gilbert Newton Lewis (1875-1946) [27] – e considerou o conteúdo revolucionário da Teoria da Relatividade por ele, Einstein, também formulada para solucionar as inconsistências ligadas às medidas de tempo e espaço e à constância da velocidade de propagação no vácuo das radiações eletromagnéticas previstas na teoria do eletromagnetismo criada por Maxwell [28]. Num rasgo de rara intuição e *insight*, De Broglie imaginou, então, uma situação segundo a qual partículas, especialmente elétrons, quando em movimento, poderiam apresentar características ondulatórias, e suas órbitas nos átomos, idealizadas por ondas estacionárias cujos números de nós se ajustavam ao perímetro da órbita permitida pelo critério de Bohr, mudando de níveis quando decaíam, apresentavam novos números inteiros de nós, contornado assim os enigmáticos “saltos quânticos”. A situação é esquematicamente mostrada nas figuras 23 e 24.

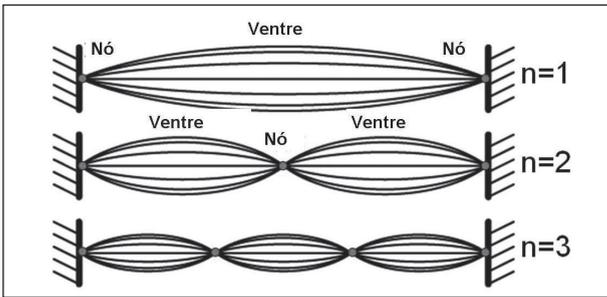


Figura 23 – Partículas em movimento

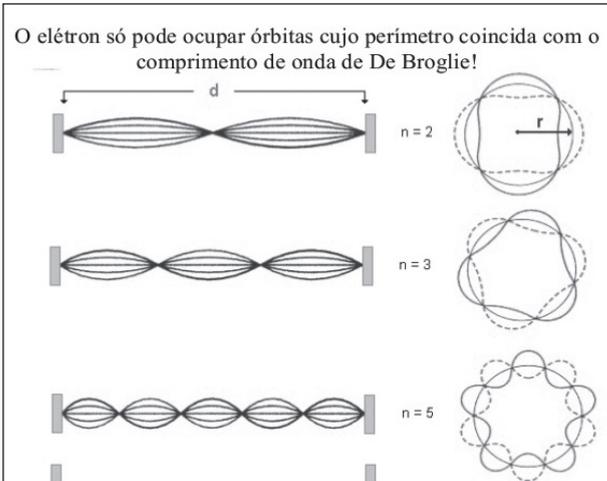


Figura 24 – Comprimento de onda

Ao desenvolver sua ideia, De Broglie conseguiu determinar o comprimento de onda correspondente,  $\lambda$ , em função da quantidade de movimento (produto da massa pela velocidade),  $p$ , da partícula, simetricamente aos fótons de Einstein, em relação à radiação. A relação obtida, evidentemente com a participação da constante de Planck,  $h$ , foi:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Sua tese apresentando a proposta foi submetida em 1924 [29], sendo laureado com o Nobel de Física em 1929.

Apesar de não estar ainda apoiada em comprovação experimental, sua formulação

foi inicialmente muito bem recebida por um bom grupo de físicos, entre os quais Einstein, que ansiavam por uma alternativa à estranha, à época, descrição matricial e aos saltos quânticos, além do fato que as ondas constituíam um modelo bem mais familiar.

A verificação experimental veio por meio dos trabalhos dos americanos Joseph Davisson (1881-1958) e Lester Germer (1896-1975) [30] quando eles, em 1927, lançaram um feixe de elétrons que, ao ser refletido por uma fina lâmina de cristal de níquel, produziu um padrão de difração, típico de fenômenos ondulatórios, fazendo prever um comprimento de onda de acordo com o que era estipulado pela análise de De Broglie, o que atestava a consistência da sua hipótese.

No mesmo ano, o físico inglês G. P. Thomson (1892-1975) [31], filho de J. J. Thomson, já citado, desco-



Figura 25 – Davisson e Germer



Figura 26 – G. P. Thomson

bridor do elétron, partícula material por excelência, realizou experiências semelhantes e comprovou a realidade das ondas associadas, com parâmetros coincidentes com os propostos pelo físico francês.

Pelos seus trabalhos, Davisson e Thomson receberam o Nobel de Física em 1937. É um notável fato histórico que pai, J. J. Thomson, e filho, G. P. Thomson tenham sido laureados com o Nobel de Física no espaço de 31 anos (o pai em 1906 e o filho em 1937) por trabalhos sobre características opostas exibidas pelo elétron.

A Figura 27 mostra um padrão típico de difração obtido por um feixe de elétrons.

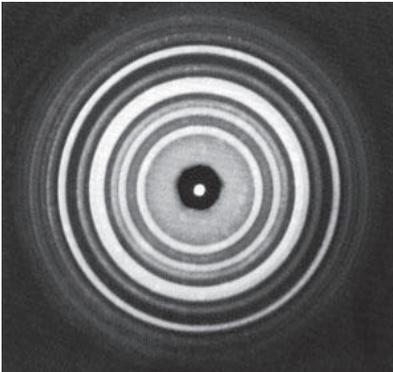


Figura 27 – Padrão de difração

## SCHRÖDINGER E SUA EQUAÇÃO

A proposta de De Broglie, no entanto, adquiriu toda a sua plenitude para o desenvolvimento da Mecânica Quântica quando o polímata austríaco Erwin Schrödinger (1887-1961) [32] – notável físico, interessado em pessoas, ideias e filosofia e autor de uma das mais influentes obras de biologia molecular, *What Is Life* [33] – apresentou à comunidade científica dedicada, em 1926 [34], uma equação capaz de descrever a propagação da onda associada à partícula, por meio de uma entidade à qual deu o nome de “função de onda”, tradicionalmente representada pela letra grega  $\psi$  (Psi), a hoje conhecida Equação de Schrödinger. Embora restrita a situações não relativistas (velocidades pequenas em relação à velocidade da luz no vácuo), essa equação ainda faz parte de boa parcela dos livros textos introdutórios do assunto, equivalendo, para a explicação de fenômenos do domínio atômico, às leis de Newton, para a mecânica clássica.

Por mera curiosidade, sem a pretensão de entrar em detalhes sobre os símbolos e operações matemáticas, ela é apresentada abaixo, na forma unidimensional:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x, t) \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}$$

onde  $\psi(x, t)$  é a função de onda,  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ,  $h$ , a constante de Planck,  $x$ , a coordenada de posição da partícula,  $t$ , o tempo;  $V(x, t)$ , a sua energia potencial e  $i$ , o indicativo dos números complexos, sugerindo que as soluções podem ser complexas.

Tais soluções, para as várias situações, são, sob o ponto de vista matemático, formalmente equivalentes às obtidas pelos métodos matriciais de Heisenberg, conforme provado em trabalho elaborado



Figura 28 – Erwin Schrödinger em 1933

pelo próprio Schrödinger, além de serem de mais fácil obtenção por lidarem com entidades, as ondas, com as quais os físicos estavam mais familiarizados.

Pela sua contribuição para o avanço do conhecimento ligado ao domínio atômico, Schrödinger recebeu o Nobel de Física em 1933, dividido com o inglês Paul Dirac



Figura 29 – Paul Dirac

(1902-1984) [35], responsável, entre outras realizações, pela extensão da teoria do cientista austríaco, por meio da qual foi possível incluir situações relativistas, além de permitir a dedução lógica, propiciada pela sua formulação, da realidade do chamado *spin*, propriedade puramente quântica exibida por algumas partículas, no caso pelo elétron também, seu objeto de estudo – sem associação, no entanto, à rotação em torno do próprio eixo sugerida pelo senso comum –, e já antecipada por Wolfgang Pauli quando este formulou o seu Princípio da Exclusão, e de propor a existência de uma notável entidade nova, mais tarde comprovada experimentalmente, o pósitron, um equivalente positivo do elétron.

É interessante assinalar que, ao contrário do que se poderia supor, Schrödinger obteve sua equação – hoje pilar básico para qualquer consideração de Mecânica Quântica no que diz respeito a cálculos, aplicações tecnológicas e estudos interpretativos – quando se enclausurou em retiro, de modo a se dedicar exclusivamente à questão, e que chegou à sua forma final não por dedução de algum outro princípio matemático ou mesmo físico, mas por pura intuição e imaginação, embora guiado por fundamentos bem estabelecidos, ligados à Física clássica, que dominava perfeitamente.

Todo o processo parece confirmar que, mais do que em qualquer outra área da Física, no desenvolvimento da Mecânica Quântica, tipificado não só pelo trabalho de Schrödinger como pelo de seus contemporâneos fundadores – Bohr formulou suas hipóteses para explicar as órbitas do átomo de Rutherford, sem se basear também em deduções matemáticas –, a criatividade na ciência depende de algo mais que a razão pura [36].

Mas, afinal, o que são essas ondas imaginadas por De Broglie e formalizadas matematicamente por Schrödinger? O que “ondula”?

O físico Max Born (1882-1970) [37] – o mesmo que, ao examinar a formulação de Heisenberg, baseada somente em fatos observáveis, exibindo uma incomum não-comutatividade, sugeriu, em 1926, a analogia do formalismo com o cálculo matricial – propôs, ao refletir sobre fenômenos ligados à colisão de partículas e, com base no Princípio da Incerteza de Heisenberg, que a função de onda de Schrödinger  $\psi$  consistia numa entidade cuja amplitude (o quadrado do seu valor num determinado ponto) expressava a probabilidade da partícula (o elétron, por exemplo), se observada, ser encontrada naquele ponto. A ironia é que o mesmo cientista que ajudou a edificar uma teoria baseada no que podia ser observado tenha sido o criador de uma entidade que nunca pôde sê-lo, a função de onda, como agente de probabilidade. Pela sua contribuição, Born recebeu o Nobel de Física em 1954.

A Mecânica Quântica – termo formalmente criado por Born somente em 1924 –, com o formalismo esquematicamente aqui delineado, baseado na equação de Schrödinger, fruto de uma notável intuição visando descrever a propagação das ondas imaginadas por De Broglie (outro *insight* milagroso), e nas consequências das suas respectivas soluções, aliadas à visão probabilística (mais uma ousadia de imaginação lastreada pelo conhecimento teórico de seu proponente), constitui a base de um ramo do conhecimento humano notável pela precisão dos resultados previstos pela teoria. É responsável – por meio dos desdobramentos tecnológicos possibilitados pela aplicação dos citados



Figura 30 – Max Born

princípios, criados basicamente até meados da década de 30 do século passado, quando foi praticamente concluída –, até os nossos dias, por uma transformação nunca vista, em período comparável, ao longo da história da humanidade, do comportamento das pessoas e dos avanços em vários outros setores, como a medicina e as telecomunicações. Para um cidadão nascido nos últimos 30 anos é difícil imaginar a vida sem celulares, computadores, *lasers* e recursos de diagnóstico como tomografias e ressonâncias magnéticas, entre outros do dia a dia.

## O QUE SIGNIFICA? A INTERPRETAÇÃO DE COPENHAGUE

Em que pese o estrondoso sucesso do formalismo matemático da Mecânica Quântica no confronto experimental, capaz de desencadear toda essa revolução tecnológica, suas conclusões agridem o chamado senso comum.

Foi natural então que seus próprios criadores, não somente os filósofos,

passassem a questionar, desde as suas fundações, o que significava tudo isso, que tipo de realidade a teoria estava tentando transmitir.

Surgiram perguntas tais como: o que, afinal, significa a função  $\psi$  que ninguém nunca conseguiu detectar? A que tipo de probabilidade ela se refere? Como se comportam as entidades quânticas descritas pela matemática correspondente? Será que a incapacidade de responder a estas e outras indagações decorre da inadequação da linguagem humana, habituada a descrever bem a experiência da escala humana, não se prestando, no entanto, para descobrir a sutileza do microcosmo?

Investigações como essas fazem parte de um campo do conhecimento na Física designado genericamente como “Interpretações da Mecânica Quântica”, ao qual inicialmente poucos se dedicaram – por influência da postura ainda dominante no ambiente de trabalho de muitos físicos, configurada pelo lema “cale-se e limite-se a calcular” –, mas que atualmente vem sendo alvo de um número cada vez maior de pensadores.

Na verdade, são várias, atualmente, as interpretações, com pontos de vista antagônicos, que se encontram na disputa pela tentativa de desvendar o mistério da realidade física, cada uma delas defendida com empenho pelos seus proponentes, mas nenhuma ainda com aceitação geral.

Um dos mais notáveis confrontos iniciou-se já na década de 1920, envolvendo dois gigantes da nova visão, Einstein e Bohr, e se estendeu até 1955, ano da morte do primeiro [4]. Einstein defendia um ponto de vista denominado realista, segundo o qual existe uma grande realidade independente do formalismo matemático, cuja descoberta deve constituir a missão principal da ciência; Bohr insistia que a

Física não tem por propósito descobrir como a natureza funciona, mas simplesmente descrevê-la. O debate entre os dois talvez constitua uma das mais expressivas disputas intelectuais da história, somente comparável, talvez, ao ocorrido entre Newton e Leibniz (1646-1716), em torno do Cálculo Infinitesimal [38].

Não serão apresentadas considerações sobre as várias interpretações desenvolvidas ao longo da existência da Mecânica Quântica, pois tal tarefa extrapola os limites estabelecidos para o presente trabalho. Menciona-se, no entanto, o fato de que a mais aceita ainda hoje pela maioria dos físicos é a conhecida como Interpretação de Copenhague, formulada sob a liderança de Bohr e que atribui ao ato da observação (*measurement*) não um papel independente do sistema a ser observado, incapaz de perturbá-lo, como ocorre no caso dos sistemas clássicos, mas de elemento ativo e influente na obtenção dos resultados de medidas em entidades quânticas. Ou seja: diferentes montagens de observação revelam faces diferentes e até antagônicas do mesmo sistema quântico.

Além disso, o ato de observar apresenta aspectos incluídos na sua interpretação que o próprio Bohr se esquivou de elucidar, como o chamado “colapso da função de onda”, que ocorre quando se realiza uma observação que tem que dar um resultado determinado e acessível a quem observa (a posição de um ponteiro, por exemplo, num medidor), com uma determinada probabilidade – não porque haja ignorância sobre os dados, como na probabilidade da previsão do tempo, por exemplo, mas porque eles “só passam a existir após a observação” –, entre os muitos que estão contidos na função de onda. Trata-se de um processo não contemplado pelas propriedades da equação de Schrödinger, sobre a qual a interpretação é construída.

Na verdade, há, segundo Bohr, uma dificuldade de linguagem, pois a que se usa no mundo normal, consistente com a chamada “intuição” convencional, talvez não se adapte à descrição do que realmente ocorre no mundo quântico.

## A DUPLA RANHURA

Para ilustrar tal perplexidade tentar-se-á descrever um experimento famoso apresentado em muitos cursos introdutórios de Mecânica Quântica, inicialmente *gondanken* (de pensamento), mas recentemente já realizado em laboratório, cujos resultados são previstos pelo formalismo, afinados com a Interpretação de Copenhague, mas inteiramente em contraposição ao senso comum [36]. É denominado experimento da dupla ranhura (*double slit experiment*, em inglês) e prescinde, para seu entendimento, de qualquer conhecimento de matemática superior. As figuras 31, 32 e 33 o ilustram.

A Figura 31, repetição de uma já apresentada no trabalho anterior [1] para ilustrar propriedades típicas de ondas, representa uma fonte (de luz ou de som, por exemplo) cuja frente, após passar por uma primeira ranhura, forma outras que vão atingir o anteparo de duplas ranhuras. A partir daí, são criadas duas outras, que, ao atingirem a tela de

deteção, exibem franjas claras e escuras, mostradas na imagem ao lado, como aparecem num filme revelado, no caso da luz, as claras correspondendo à soma de dois máximos das ondas e as escuras a de um máximo com um mínimo. O padrão de franjas, denominado interferência, é característico de qualquer encontro de duas ondas, sejam elas sonoras, luminosas ou as provocadas por agitações na superfície de um lago. É importante notar que, devi-

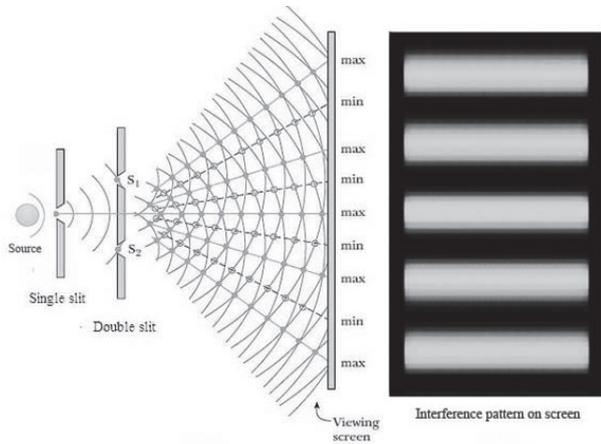


Figura 31 – Experimento da dupla ranhura

Fonte: <https://www.google.com.br/search?q=double+slit+experiment&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=2ahUKewiZ0r6X9fjaAhUHfZAKHbiPCfAQsAR6BAgAEEQ&biw=1366&bih=637#imgre=VLSS6wztfQDesM>

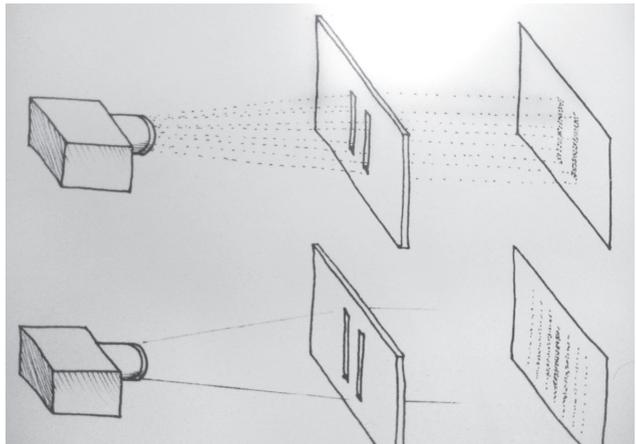


Figura 32 – Partículas e elétrons lançados em dupla ranhura

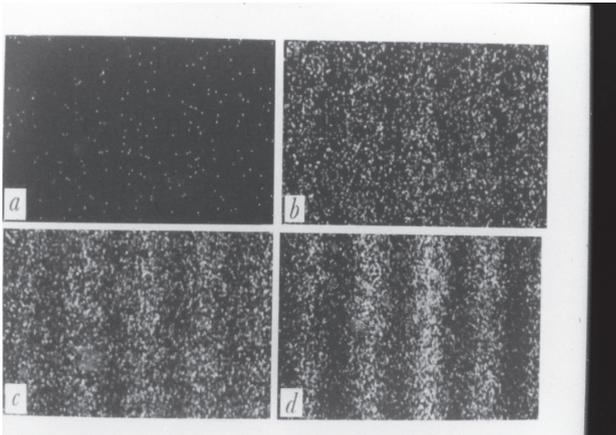


Figura 33 – Experimento real em tela

do ao fato de que a influência das ondas abrange uma região extensa do espaço, uma mesma frente passa simultaneamente pelas duas ranhuras.

A Figura 32 [36] mostra, na parte superior, um jato de partículas clássicas (grãos de areia, por exemplo) lançadas ao anteparo com as duas ranhuras e recolhidas numa tela (um quadro impregnado de cola, por exemplo) que formará então a configuração aproximada delineada. A parte inferior apresenta um canhão de elétrons que os emite um a um, não em forma de feixe como nos experimentos já citados de Davisson e Germer [30], que, ao atravessarem as duas ranhuras, aparecerão no detector posterior (um tubo de TV, por exemplo), que se iluminará no ponto onde cada elétron chegar. O surpreendente é que o padrão apresentado é típico de interferência ondulatória, como se cada ponto luminoso que indica a chegada na tela, formando as franjas lentamente, configurasse um elétron passando pelas duas ranhuras ao mesmo tempo, uma inconsistência para os padrões normais de senso comum, já que este não admite que um corpo ocupe o mesmo lugar no espaço simultaneamente.

A Figura 33 [36] constitui a foto de um experimento real realizado em 2016 pelo grupo do físico Akira Tonomura [39], em que a tela posterior é fotografada em vários instantes progressivos, mostrando os pontos luminosos marcando a chegada gradativa dos elétrons, até que um número suficiente deles permita distinguir as franjas de interferência.

Mas a perplexidade não para por aí. Se, com um aperfeiçoamento do arranjo experimental, for possível colocar um detector de elétrons numa ou nas duas ranhuras de modo a permitir determinar por qual delas o elétron passou (ou mesmo se uma das ranhuras fosse obstruída de modo a se ter certeza que o elétron passou pela não obstruída), isto é, se for possível determinar a sua trajetória, as franjas desaparecem e o aspecto passa a ser o de partículas clássicas mostradas na parte superior da segunda figura, como se o fato da observação do caminho do elétron, indique que seu comportamento mude de ondulatório para corpuscular. Tudo parece indicar que o elétron participa, com o aparato de observação, de uma espécie de esconde-esconde no qual adivinha as intenções do observador.

É nesse sentido que a Interpretação de Copenhague assevera que o sistema a ser observado e o esquema experimental usado para tal formam um só conjunto e que, dependendo de cada montagem, são obtidos resultados diferentes e até antagônicos.

As conclusões delineadas esquematicamente acima são previstas pelo formalismo matemático da Mecânica Quântica, que permitiram um enorme

avanço tecnológico e se afinam com a interpretação proposta pelo grupo dinamarquês. Desnecessário advertir ao leitor que é inútil tentar tal experimento em casa, pois as condições para sua execução são extremamente críticas, só obtidas, até agora, em laboratório.

Mas a pergunta que não cala é: o que acontece na realidade com o elétron? Bohr responde que tal pergunta não faz sentido, pois a função da Mecânica Quântica não é afirmar como funciona a natureza, mas simplesmente investigar o que se pode dizer sobre ela. Na verdade, não há resposta até hoje que permita descobrir tal realidade e, segundo o lendário físico Richard Feynman (1918-1988) [40], Nobel de Física em 1965 pelo seu trabalho no campo denominado “Eletrodinâmica Quântica”, as estranhas conclusões esquematizadas acima constituem o único grande mistério para o qual o atual estágio da Mecânica Quântica é incapaz de esclarecer o que ocorre e só consegue contar como ocorre [41].

## CONCLUSÃO

Voltando ao recinto onde ocorrem as evoluções envolvendo ondas e corpúsculos, vê-se que o panorama foi modificado de maneira desconcertante em relação à configuração que fechou o trabalho anterior a este [1].

Agora, além das ondas puras, como, por exemplo, as sonoras (nas quais o que “ondula” é o meio onde ocorrem) e as eletromagnéticas (nas quais o que oscila é o campo eletromagnético, das

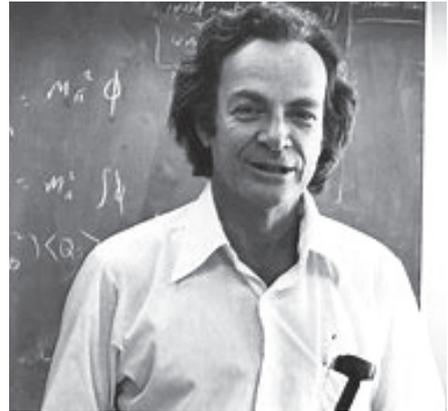


Figura 34 – Richard Feynman

partículas autênticas, como os elétrons, dos corpúsculos de luz, os fótons, que às vezes se manifestam nas radiações, numa estranha dualidade vislumbrada por Einstein para explicar o efeito fotoelétrico), constata-se mais uma perplexidade, diante de outra dualidade, de certa forma simétrica em relação à primeira, imaginada por De Broglie, formalizada e estendida por Schrödinger, com pitadas de probabilidade acrescentadas por Born, na qual entidades até então pensadas como partículas indiscutíveis podem apresentar associações ondulatórias, sem que se tenha ideia do que “ondula” nestas ondas de probabilidade, e exibem comportamentos contraditórios, dependendo de como são observadas, às vezes apresentando interferência quando lançadas uma a uma num anteparo de duas ranhuras e noutra configuração, ao tentar-se observar o caminho adotado pela partícula, se manifestam como partículas clássicas.

📁 CLASSIFICAÇÃO PARA ÍNDICE REMISSIVO:

<CIÊNCIA E TECNOLOGIA>; Ciência; Energia; Mecânica; Estudo;

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. GOTAC, P. R. "Corpúsculos e Ondas", *Revista Marítima Brasileira*, v. 137, nº 10/12, out/dez 2017.
2. <https://www.infoescola.com/biografias/galileu-galilei/>.
3. [https://pt.wikipedia.org/wiki/Michael\\_Faraday](https://pt.wikipedia.org/wiki/Michael_Faraday).
4. KUMAR, M. *Quantum – Einstein, Bohr and the great debate about the nature of reality*. W.Norton & Company, New York, 2008.
5. <http://www.fisica.net/relatividade/o-eclipse-de-1919.php>.
6. [https://pt.wikipedia.org/wiki/Raios\\_X](https://pt.wikipedia.org/wiki/Raios_X).
7. <http://leonardoflor.blogspot.com.br/2012/03/proeja.html>.
8. [https://pt.wikipedia.org/wiki/Arthur\\_Holly\\_Compton](https://pt.wikipedia.org/wiki/Arthur_Holly_Compton).
9. EISBERG, R.M. *Fundamentals of modern Physics*. Wiley International Edition, 1961.
10. [https://pt.wikipedia.org/wiki/Ernest\\_Rutherford](https://pt.wikipedia.org/wiki/Ernest_Rutherford).
11. Rutherford, E. (1911). "The Scattering of  $\alpha$  and  $\beta$  rays by Matter and the Structure of the Atom". *Philosophical Magazine*. 6: 21.
12. [https://pt.wikipedia.org/wiki/Part%C3%ADcula\\_alfa](https://pt.wikipedia.org/wiki/Part%C3%ADcula_alfa).
13. <http://alunosonline.uol.com.br/quimica/experimento-rutherford.htm>.
14. <http://alunosonline.uol.com.br/quimica/experimento-rutherford.html>.
15. <http://www.seara.ufc.br/tintim/fisica/hidrogenio/hidrogenio2.htm>.
16. <https://www.google.com.br/search?q=johann+jakob+balmer&oq=Joahann+Jakob+&aqs=chrome.3.69i57j0l5.15896j0j7&sourceid=chrome&ie=UTF-8>.
17. [http://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/index.php/S%C3%A9rie\\_de\\_Balmer](http://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/index.php/S%C3%A9rie_de_Balmer).
18. [https://pt.wikipedia.org/wiki/Niels\\_Bohr](https://pt.wikipedia.org/wiki/Niels_Bohr).
19. <https://www.google.com.br/search?q=As+tr-es+hip%C3%B3tese+de+Bohr&source=lnms&tbnm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjLn5qb74TahXDG5AKHQCID3oQAUICigB&biw=1366&bih=637#imgsrc=7-1rBqVZ42LD0M>.
20. <https://www.google.com.br/search?q=Arnold+Sommerfeld&oq=Arnold+Sommerfeld+&aqs=chrome..69i57j0l5.22312j0j7&sourceid=chrome&ie=UTF-8>.
21. [https://pt.wikipedia.org/wiki/Wolfgang\\_Pauli](https://pt.wikipedia.org/wiki/Wolfgang_Pauli).
22. *On a Quantum-Theoretical Reinterpretation of Kinematics and Mechanical Relations*, traduzido para o inglês por Van der Waerden (1967).
23. <https://www.google.com.br/search?q=Heisenberg&oq=Heisenberg&aqs=chrome..69i57j0l5.5463j0j7&sourceid=chrome&ie=UTF-8>.
24. Heisenberg, W. (1927), "Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik", *Zeitschrift für Physik* (in German), 43 (3–4): 172–198, Bibcode:1927ZPhy...43..172H, doi:10.1007/BF01397280. Annotated pre-publication proof sheet of Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik, March 21, 1927.
25. [https://pt.wikipedia.org/wiki/Louis\\_de\\_Broglie](https://pt.wikipedia.org/wiki/Louis_de_Broglie).
26. GOTAC, P. R. "A crise", *Revista do Clube Naval*, nº 358, abr/mai/jun 2011.
27. <http://www.fisica.net/mecanica-quantica/a-origem-da-palavra-foton.php>.
28. GOTAC, P. R. "O esquecido Maxwell", *Revista do Clube Naval*, nº 373 jan/fev/mar 2015.
28. DE BROGLIE, L. *Recherches sur la théorie des quanta*, Thesis (Paris), 1924; L. de Broglie, *Ann. Phys. (Paris)* 3, 22 (1925). Reimpresso em *Ann. Found. Louis de Broglie* 17 (1992) p. 22.
29. [http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1806-11172005000400005](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172005000400005).
30. <https://www.google.com.br/search?q=G.P.+Thomson&oq=G.P.+Thomson&aqs=chrome..69i57j0l5.9183j0j7&sourceid=chrome&ie=UTF-8>.
31. [https://pt.wikipedia.org/wiki/Gato\\_de\\_Schr%C3%B6dinger](https://pt.wikipedia.org/wiki/Gato_de_Schr%C3%B6dinger).
32. SCHRÖDINGER, E. *What is Life*, Cambridge Press, 1992.

33. SCHRÖDINGER, E. (1926). "An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules" (PDF). *Physical Review*. 28 (6): 1.049-1.070. Bibcode:1926PhRv...28.1049S. doi:10.1103/PhysRev.28.1049.
34. <https://www.google.com.br/search?q=Dirac&oq=Dirac&aqs=chrome..69i57j0l5.8256j0j7&sourceid=chrome&ie=UTF-8>.
35. BALL, Philip. *Beyond Weird*, Bodley Head, 2018.
36. [https://pt.wikipedia.org/wiki/Max\\_Born](https://pt.wikipedia.org/wiki/Max_Born).
37. [https://en.wikipedia.org/wiki/Leibniz%E2%80%93Newton\\_calculus\\_controversy](https://en.wikipedia.org/wiki/Leibniz%E2%80%93Newton_calculus_controversy).
38. <https://filandiereonline.com/2016/06/29/one-electron-double-slit-experiment-by-akira-tonomura/>.
39. <https://www.bing.com/search?FORM=INCOH2&PC=IC04&PTAG=ICO-cff7e248&q=Richard+Feynman>.
40. FEYNMAN, R.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. *Lectures on Physics*, vol. 3. Addison Wesley, 1977.