



# APRESENTAÇÃO DE UM MODELO MATEMÁTICO PARA UMA MELHOR COMPREENSÃO SOBRE O PHASE-SHIFT BEAMFORMING

Autor: CC Anderson Barbosa da Cruz Peçanha<sup>1</sup>

## RESUMO

Este trabalho apresentará um modelo matemático que pode ser utilizado para entender como os ecobatímetros multifeixe (MBES) executam o *phase-shift beamforming*. As equações foram testadas para um sinal acústico transmitido por um tipo de MBES simplificado e os resultados e limitações serão discutidas ao longo deste artigo.

## Palavras-chave:

Acústica submarina, *phase-shift beamforming* e ecobatímetro multifeixe.

## ABSTRACT

This work will present a mathematical model that can be used for understanding how multibeam echosounders (MBES) perform *phase-shift beamforming*. The equations were tested for an acoustic signal transmitted by a simplified type of MBES and the results and limitations will be discussed along this paper.

## Keywords:

Underwater acoustics. *Phase-shift beamforming*, Multibeam echosounder.

## 1. INTRODUÇÃO

MBES são largamente empregados em levantamentos hidrográficos onde se deseja alcançar um recobrimento batimétrico de ao menos 100% do fundo. Seu princípio de funcionamento consiste na transmissão de um pulso acústico apontado em direção ao fundo que, após a reflexão deste mesmo sinal na superfície de interesse (alvo, leito marinho, etc.), é convertido em diversos feixes (varredura transversal), por meio de técnicas avançadas de processamento de sinal (INTERNATIONAL HYDROGRAPHIC ORGANIZATION, 2005).

O propósito deste artigo é descrever a teoria envolvida no processo de *phase-shift beamforming* executado por MBES. Para isto, um modelo matemático foi aplicado a dados coletados por um array linear de 128 elementos, igualmente espaçados

<sup>1</sup> Hidrógrafo. Graduado em Ciências Navais pela Escola Naval. Encarregado da Divisão de Análise de Levantamentos Hidrográficos do CHM. MSc em Earth Sciences - Ocean Mapping pela Universidade de New Hampshire - EUA.



de 0,0032 metros, este que se operava com frequência nominal constante de 200 kHz e taxa de amostragem de 34.482,76 amostras por segundo, para cada canal. Como forma de simplificação, assumiu-se que as taxas de amostragem de todos os elementos estavam sincronizadas. O dado bruto coletado pelo MBES, em um tanque de teste, era composto por duas matrizes, sendo uma com as amostras em fase (F) e a outra com as amostras em quadratura (Q). Para esta demonstração, um total de 700 amostras foram coletadas para cada um dos 128 elementos. Após a combinação das matrizes F e Q, os dados de saída do receptor foram convertidos em uma varredura de 131 feixes (-65° a 65°). Convencionou-se que o feixe na posição de 0° representa a linha perpendicular ao vetor de transmissão. Para os cálculos que serão apresentados a seguir, assumiu-se o valor de 1.477 m/s para o perfil de velocidade do som ao longo de toda a coluna d'água. Um código em MATLAB foi desenvolvido para testar o modelo e para gerar as figuras apresentadas neste artigo.

## 2. METODOLOGIA

Ao contrário do que muitos pensam, todo o processo de formação de feixes é realizado eletronicamente, sem que o transdutor tenha que se mover fisicamente ou ter um formato curvo (LURTON, 2010). O número de feixes que podem ser gerados não tem nenhuma correlação com a quantidade de elementos do *array*. No caso deste trabalho, o *array* linear variou, eletronicamente, de -65 ° a 65°, o que significa que todos os 128 elementos foram rotacionados eletronicamente *beam steering*, ao mesmo tempo, para que cada um dos 131 feixes pudesse ser gerado. Todo este processo se dá pelo uso da tensão de saída do receptor, que neste caso específico, são as matrizes F e Q.

Para este projeto, o centro do *array* linear foi escolhido como ponto de referência para o cômputo das mudanças de fase de cada um dos 128 elementos. A Figura 1 ilustra um exemplo de como uma onda incidente plana se move pelo transdutor. Na mesma figura,  $\theta$  representa o ângulo de *beam steering* em um dado momento.

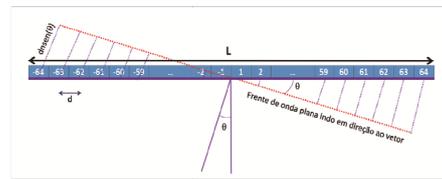


Figura 1 – Esquema de formação dos feixes. O centro do vetor foi convencionado como ponto de referência e  $\theta$  é o ângulo de *beam steering* em um determinado momento. Os 128 elementos estão representados de  $-64 \leq n \leq 64$ . L é o comprimento do array linear e d é a distância entre dois elementos consecutivos.

Como todos os elementos irradiam em fase e com a mesma potência, o enésimo elemento gera uma onda de pressão conforme mostrado na Equação 1 (KINSLER e colab., 2000):

$$S_n(t) = \frac{A}{r_n} e^{j(\omega t - kr_n)}$$

Onde:

i.  $S_n(t)$  é o sinal gravado por cada um dos 128 elementos

ii.  $n$  é o número do elemento

iii.  $\frac{A}{r_n}$  é a magnitude da pressão acústica a uma certa distância denominada  $rn$

iv.  $r_n$  é a distância de cada elemento em relação ao alvo. Como  $r$  é a distância considerada em relação ao centro do vetor (ponto de referência), então:  $r_n = r + dnsen(\theta)$ , onde  $-64 \leq n \leq 64$  e  $d$  é a distância entre dois elementos consecutivos que, no caso deste artigo, é de 0,0032 m. Como neste caso o número de elementos é par e o ponto de referência está localizado no centro do *array* linear, o valor de  $n$ , que será utilizado na



Equação 5 e em diante, será igual a  $(n-64.5)$ , onde o elemento -64 corresponde a  $n=1$  e o elemento 64 corresponde a  $n=128$ . Assim, para estas equações,  $r_n = r + d(n-64.5)\text{sen}(\theta)$

v.  $\omega$  é a frequência angular e vale  $2\pi f$ . Para este projeto,  $f$  é igual a 200 kHz

vi.  $K$  é o wave number. Vale  $\frac{2\pi}{\lambda}$  ou  $\frac{\omega}{c}$

Para este estudo,  $S_n(t)$  da Equação 2 é uma matriz de  $128 \times 700$ , onde as linhas são os elementos e as colunas são as amostras gravadas.

$$S_n(t) = F(t) + jQ(t)$$

A Figura 2 mostra um gráfico para  $20\log_{10}S_n(t)$

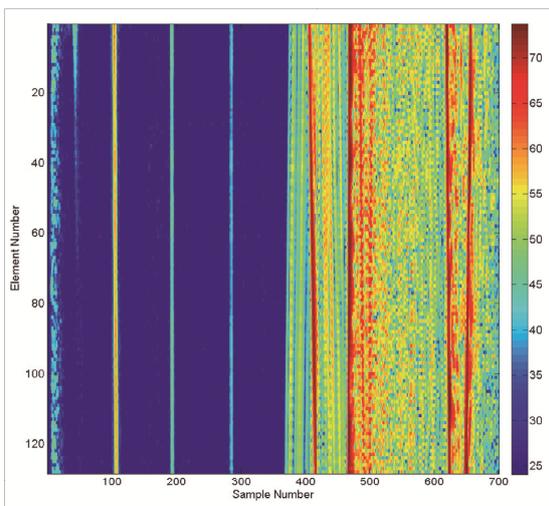


Figura 2 -  $20\log_{10}S_n(t)$ . A escala de cores representa a amplitude de saída, em dB. O eixo horizontal representa o número da amostra (total de 700 amostras) e o eixo vertical traz o número dos elementos (total de 128 elementos).

Neste caso, onde a taxa de amostragem é conhecida, a Equação 3 mostra como é feito o cálculo do tempo para uma determinada amostra  $n$ :

$$t_n(\text{em segundos}) = \frac{\text{número da amostra}}{\text{frequência de amostragem}} = \frac{\text{número da amostra}}{34482.76 \text{ samples}}$$

Conhecendo-se  $t_n$  para cada número de amostra, é possível calcular o alcance pela fórmula mostrada na Equação 4.

$t_n$ , é o tempo de ida e volta do sinal acústico. É o tempo que o sinal leva para percorrer os trajetos projetor - alvo e alvo - receptor. O fator de  $\frac{1}{2}$  na Equação 4 é para evitar o cômputo de alcances dobrados.

$$\text{alcance}_n(\text{em metros}) = \frac{ct_n}{2} = \frac{1477t_n}{2}$$

Considerando-se que os alvos utilizados neste experimento estão localizados no campo distante (*far-field*), pode-se assumir que  $\frac{A}{r_n} \approx \frac{A}{r}$ . Assim,  $S_n(t)$  também pode ser escrito conforme é mostrado na Equação 5:

$$S_n(t) = \frac{A}{r} e^{j(\omega t - kr)} \sum_{n=1}^{128} e^{-jk(n-64.5)d\text{sen}\theta}$$

A Equação 5 adiciona os valores de  $S_n(t)$  para todos os 128 elementos em fase. Ela traz o resultado para a situação em que todos os 128 elementos estão apontados para a direção de  $0^\circ$  (nadir).

A Equação 6 precisa ser aplicada ao resultado  $S_n(t)$  da Equação 5, de forma a permitir o funcionamento do modelo de *phase-shift beamforming* deste projeto. A Equação 6 é responsável pela criação de uma matriz de dimensões  $131 \times 700$ , onde cada linha representa cada um dos 131 feixes e as colunas contêm os dados gravados em cada uma das 700 amostras.

$$S_b(\theta) = \sum_{n=1}^{128} S_n(t) e^{jk(n-64.5)d\text{sen}\theta}$$

Substituindo  $S_n(t)$  da Equação 5, tem-se a Equação 7:

$$S_b(\theta) = \sum_{n=1}^{128} \frac{A}{r} e^{j(\omega t - kr)} e^{-jk(n-64.5)d\text{sen}\theta} e^{jk(n-64.5)d\text{sen}\theta}$$

Sabendo-se que os termos  $e^{jk(n-64.5)d\text{sen}\theta}$  e  $e^{-jk(n-64.5)d\text{sen}\theta}$  são conjugados e o resultado de sua multiplicação é igual a 1, chega-se à Equação 8:





$$S_b(\theta) = \sum_{n=1}^{128} \frac{A}{r_n} e^{j(\omega t - kr_n)}$$

Assim, o resultado final para cada valor diferente de  $\theta$  é mostrado na Equação 9:

$$S_b(\theta) = 128 \frac{A}{r_n} e^{j(\omega t - kr_n)}$$

Neste trabalho, o resultado mostrado na Equação 8 foi obtido pela multiplicação de  $F(t) + jQ(t)$ , por  $e^{jk(n - 64.5)dsen\theta}$ .

### 3. RESULTADOS

A Equação 10 (KINSLER e colab., 2000) mostra como se calcular o fator direcional,  $H(\theta)$ , para um *array* linear:

$$H(\theta) = |\text{sen}[(0,5n)kd(\text{sen}\theta_i - \text{sen}\theta)] / \text{nsen}[(0,5)kd(\text{sen}\theta_i - \text{sen}\theta)]|$$

Onde  $\theta$  é a direção para onde o lóbulo principal do feixe está apontando e  $\theta_i$  varia da seguinte forma:  $-\pi \leq \theta_i \leq \pi$ . A Figura 3 mostra como o *beam pattern* se comporta para valores de *beam steering* de  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $65^\circ$ .

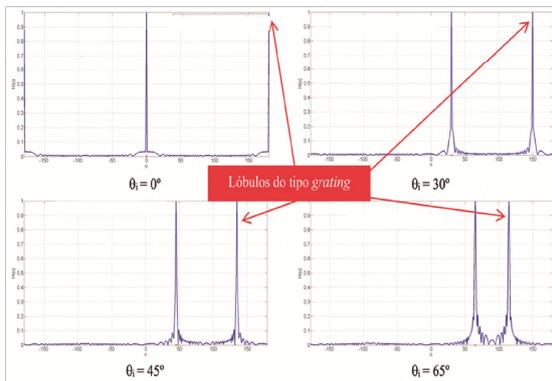


Figura 3 - Ilustração do *beam pattern* para ângulos direcionais ( $\theta_i$ ) de  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $65^\circ$ .

A Equação 10 e a Figura 3 mostram que os lóbulos *grating* e principal ocorrem quando o numerador e o

denominador do fator direcional são iguais a 0. Para o vetor utilizado neste trabalho, a Figura 3 também mostra que, quanto mais o valor de *beam steering* se afasta de  $0^\circ$ , mais se aproximam os lóbulos principal e os *grating*. Outro efeito colateral que pode ser observado é que, nestes casos, os feixes ficam mais alargados e isto implica em perda de resolução. Ambas as situações são indesejáveis. O lóbulo *grating* é um tipo específico de lóbulo secundário, cuja amplitude é a mesma do lóbulo principal (vide Figura 3). Este tipo de lóbulo causa interferências que podem limitar a performance do equipamento (IQBAL e POUR, 2018).

A Figura 4 mostra uma representação gráfica para a função  $20\log_{10} S_b(\theta)$ .

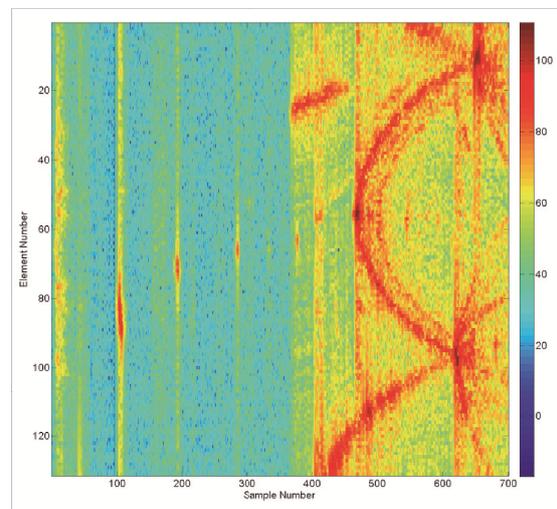


Figura 4 -  $20\log_{10} S_b(\theta)$ . O eixo horizontal traz a informação do número da amostra e o eixo vertical o número do elemento. A escala de cores na lateral representa a amplitude de saída do *phase-shift beamformer*, em dB.

As Figuras 5 e 6 mostram plotagens da batimetria em coordenadas polar e cartesianas, respectivamente, para os resultados alcançados por meio da Equação 9.

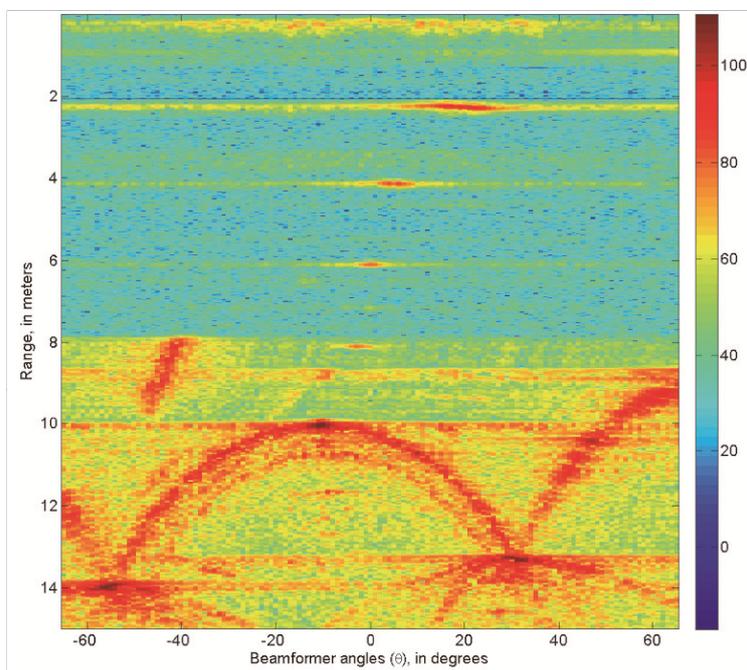


Figura 5 - Gráfico com a batimetria multifeixe em coordenadas polares. O eixo horizontal representa a direção do feixe (varredura de  $-65^{\circ}$  a  $+65^{\circ}$ ) e o eixo vertical o alcance, em metros. A escala de cores representa a amplitude do sinal de saída do phase-shift beamformer, em dB.

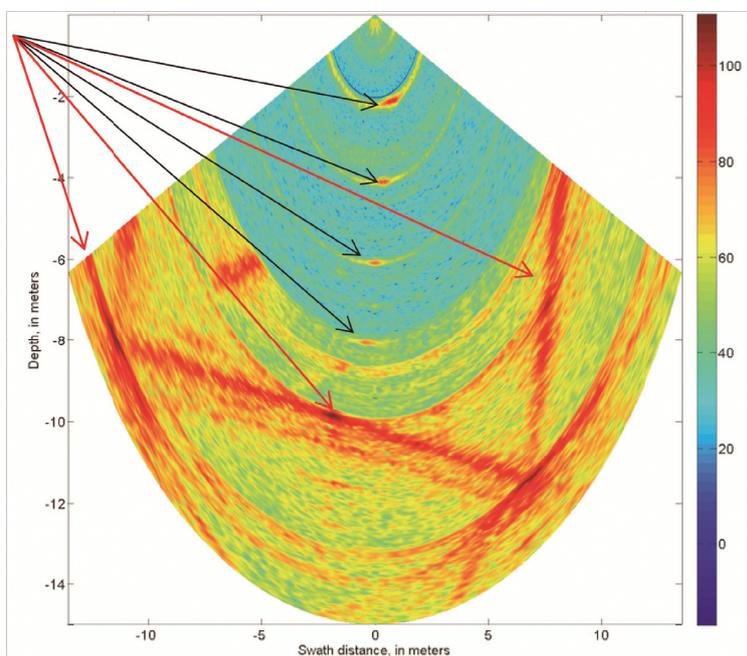


Figura 6 - Gráfico com a batimetria multifeixe em coordenadas cartesianas. O eixo horizontal representa a distância da varredura e eixo vertical a profundidade, ambos em metros. A escala de cores representa a amplitude do sinal de saída do *phase-shift beamformer*, em dB. As setas pretas apontam para alguns alvos submersos (esferas de metal para calibração do ecobatímetro), que foram colocados a 2, 4, 6 e 8 metros de distância do transdutor. As setas vermelhas apontam para as paredes do tanque de teste onde o experimento foi conduzido.



#### 4. CONCLUSÃO

Após a análise dos resultados, pode-se concluir que o modelo apresentado por este artigo apresenta as seguintes limitações:

a) O array linear virtual (*beam steering*) é menor que o array linear real (Figura 7). Um *array* menor faz com que a largura de banda se amplie, o que acarreta em perda de resolução. Este efeito foi mostrado na Figura 3, onde quanto maior era o valor de  $\theta$ , mais alargado se tornava o feixe;

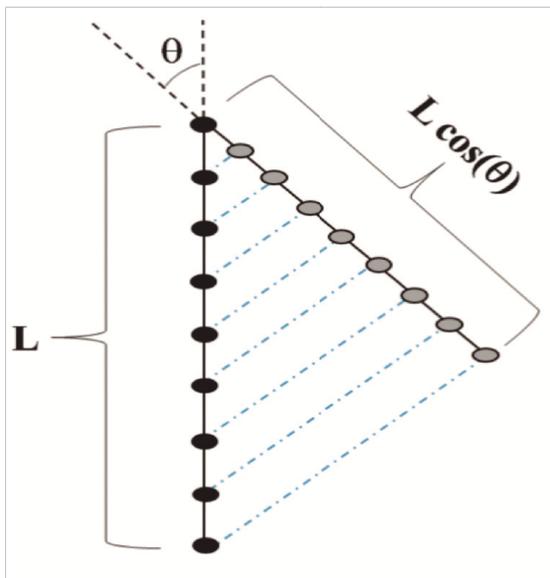


Figura 7 - Um *array* linear real (array com pontos pretos), com comprimento  $L$ , e um *array* linear virtual, para um dado ângulo  $\theta$  de *beam steering* (array com pontos cinzas), cujo comprimento é igual a  $L \cos(\theta)$ .

b) O modelo apresentado não se aplica a sinais do tipo *chirp*, que também são conhecidos como sinais lineares de frequência modulada (LFM). Sinais LFM operam com frequência variável, logo não possuem um valor de  $K$  constante, que é uma das simplificações do modelo

matemático apresentado. A tecnologia LFM é largamente utilizada em dispositivos acústicos, pois seus métodos para detecção em ambientes ruidosos são bastante significativos (KINSLER e colab., 2000; LI e BI, 2011);

c) O modelo matemático tem uma melhor performance para sinais com pulso longo, uma vez que, para estes casos, a Transformada de Fourier é mais estreita;

d) Se o valor da velocidade do som na cabeça do transdutor não for monitorado corretamente, tanto o  $K$  quanto o alcance não poderão ser determinados de forma acurada;

e) Conforme mostrado na Figura 3, os lóbulos do tipo *grating* tornam-se um grande limitador do modelo, a medida que o valor de  $\theta$  aumenta;

f) Os lóbulos laterais podem ser grandes quando as fontes individuais (elementos) possuírem um padrão de feixe não-onidirecional; e

g) As fórmulas apresentadas neste trabalho não se aplicam corretamente nos casos em que o alvo não estiver posicionado no campo distante. Nas situações onde esta premissa não for verdadeira, não se pode assumir que a onda acústica que retorna para o receptor seja plana. A diferença de fase entre a onda acústica curva (*near-field*) e plana (*far-field*) fazem com que o feixe gerado seja mais largo, uma vez que os elementos do transdutor não estarão em fase um com o outro.

Por fim, após a análise dos resultados apresentados por meio das Figuras 4, 5 e 6, pode-se concluir que o modelo matemático da Equação 6, apesar de simples, apresentou um resultado final bastante satisfatório para o entendimento dos processos envolvidos na formação da varredura angular dos MBES.



## REFERÊNCIAS

INTERNATIONAL HYDROGRAPHIC ORGANIZATION. *Manual on Hydrography*. 1st. ed. Monaco: International Hydrographic Bureau, 2005.

IQBAL, Zabeed e POUR, Maria. Grating lobe reduction in scanning phased array antennas with large element spacing. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 66, n. 12, p. 6965–6974, Dez 2018.

KINSLER, L.E. e colab. *Fundamentals of acoustics*. Fourth ed. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2000.

LI, Xiumei e BI, Guoan. *Time-frequency filtering and its application in chirp signal detection*. 2011, Berlin: Springer, 2011. p. 224–232.

LURTON, X. *An introduction to underwater acoustics - principles and applications*. Second ed. London, New York: Springer Heidelberg Dordrecht, 2010.

